FACULTEIT ECONOMIE EN BEDRIJFSKUNDE

FACULTEIT WETENSCHAPPEN

WISKUNDE I(A)
WISKUNDE I(B)

Prof. dr. J. Van der Jeugt

Opleiding: bachelor in de economische wetenschappen, in de toegepaste economische wetenschappen en in de toegepaste economische wetenschappen: handelsingenieur
Academiejaar 2019–2020

UNIVERSITEIT GENT

Inhoudsopgave

Voorwoord

Wiskunde is de taal van moderne analytische economie geworden. Ze beschrijft relaties tussen economische variabelen en grootheden. Ze formaliseert en verduidelijkt eigenschappen van deze relaties. Ze stelt economisten in staat om algemene eigenschappen die van belang zijn in het gedrag van economische systemen te identificeren en analyseren.

Elementaire economiecursussen gebruiken relatief eenvoudige wiskundige technieken om modellen te beschrijven en te analyseren : enkele begrippen uit algebra en meetkunde, grafieken van reëele functies, en soms eenvoudige calculus. Zij beschrijven modellen met één of twee producten in een omgeving van perfecte competitie, complete informatie, en zonder onzekerheid. Meer gevorderde cursussen in micro- en macro-economie laten zulke sterke vereenvoudigingen vallen, en moeten een beroep doen op meer gesofistikeerde wiskunde.

Het doel van deze cursus is om de economiestudent een dieper inzicht en kennis bij te brengen van de wiskunde die noodzakelijk is om met realistische economische modellen te kunnen werken. In Wiskunde I(A) en I(B) (meestal wordt hiernaar verwezen als "Wiskunde I") komen volgende onderwerpen aan bod : reële functies van één veranderlijke, functieonderzoek, integraalrekening, reeksen, en begrippen van lineaire algebra. In Wiskunde II (tweede bachelor) wordt verder ingegaan op wiskundige onderdelen waarvan de hedendaagse economische analyse zich bedient.

Bij het opstellen van deze cursus heb ik rekening gehouden met de volgende punten :

- Er wordt niet alleen aandacht besteed aan wiskundige technieken, maar ook aan ideeën en intuïtie. De meetkundige interpretatie van allerlei wiskundige begrippen wordt benadrukt; het visuele aspect wordt beklemtoond.
- Nieuwe begrippen worden geïllustreerd aan de hand van voorbeelden of oefeningen. Bij elk hoofdstuk horen een aantal oefeningen die onder begeleiding van een assistent zullen behandeld worden.
- Vele wiskundige begrippen worden geïllustreerd met voorbeelden uit de economie, of soms wordt een economische motivatie voor de invoering van wiskundige concepten gegeven. Anderzijds is dit wel degelijk een wiskundecursus voor economen, en gevorderde economische modellen zullen uitgebreid aan bod komen in andere opleidingsonderdelen.

Wat wordt er van de student verwacht in het kader van Wiskunde I? Tijdens de hoorcolleges zal voldoende aandacht besteed worden aan deze vraag, maar ik kan nu reeds een aantal belangrijke eisen vermelden :

- Het kennen en kunnen interpreteren van definities, stellingen, of formules. Hierbij speelt niet alleen de formulering een rol, maar vooral het kunnen weergeven van de achterliggende ideeën, kunnen uitleggen waarom bepaalde voorwaarden noodzakelijk zijn, de toepassing en het gebruik ervan kunnen toelichten.

- Het begrijpen van bewijzen, en van overgangen in bewijzen of berekeningen. Er zal weinig of geen belang gegeven worden aan het "van buiten kennen" van bewijzen, maar wel aan inzicht, het kunnen uitleggen van overgangen, het kunnen verklaren van gevolgen of veralgemeningen, en het kunnen toepassen op analoge situaties.

- Waar toepasselijk, een diep meetkundig inzicht verwerven van definities, eigenschappen, modellen.

- Het kunnen toepassen van technieken besproken in de hoorcolleges, en uitvoerig ingeoefend in de oefeningen.

De examenvorm zal voldoende toegelicht worden tijdens het academiejaar. In het bijzonder zullen er typevragen voor het theorie- en oefeningenexamen beschikbaar gesteld worden.

Verder wens ik de student te wijzen op de beschikbaarheid van het monitoraat voor de cursussen wiskunde in het eerste jaar. Dit monitoraat staat o.a. in voor de algemene begeleiding van studenten in verband met leermethodologie, en voor de praktische begeleiding van de vakken Wiskunde I(A), I(B), Statistiek I(A) en Statistiek I(B). Ik zou de student willen oproepen om zoveel mogelijk gebruik te maken van deze extra service die de Faculteit Economie en Bedrijfskunde ter beschikking stelt. Voor Wiskunde I(A) en I(B) wordt tevens gebruik gemaakt van de elektronische leeromgeving Ufora (http://ufora.ugent.be): naast andere faciliteiten kan de student hier voorbereidingsoefeningen, extra oefeningen, slides van de theorielessen, voorbeeldexamens en examenvragen terugvinden.

De huidige nota's zijn mijn derde versie voor de cursus Wiskunde I, en ik hou er rekening mee dat de tekst en inhoud voor verbetering vatbaar is. Ik zou het bijzonder op prijs stellen wanneer studenten en andere aandachtige lezers hun commentaren, suggesties, vragen en eventuele correcties aan mij zouden overmaken. Ook taalpuristen worden vriendelijk uitgenodigd om resterende fouten te melden.

Joris Van der Jeugt

Het Griekse alfabet

Wiskundigen gebruiken veel Griekse letters. Ook in deze cursus wordt nu en dan een Griekse letter gekozen als symbool voor een grootheid. Vandaar dat het zinvol is om een kort overzicht te hebben van de naam van enkele Griekse letters.

α		alfa	ι		jota	σ	Σ	sigma
β		bèta	κ		kappa	τ		tau
γ	Γ	gamma	λ	Λ	lambda	υ	Υ	upsilon
δ	Δ	delta	μ		mu	ϕ, φ	Φ	fi
ϵ, ε		epsilon	ν		nu	χ		chi
ζ		zèta	ξ	Ξ	xi	ψ	Ψ	psi
η		èta	π	Π	pi	ω	Ω	omega
θ, ϑ	Θ	thèta	ρ		rho			

Basiswiskunde

De basiswiskunde uit het secundair onderwijs volstaat om deze cursus te volgen. Studenten die menen dat hun basiskennis wiskunde best wat bijgeschaafd wordt, kunnen gebruik maken van het volgende boek:

Basisboek Wiskunde (2e editie)
Jan van de Craats en Rob Bosch
Pearson Education, 2009.

Dit is in de eerste plaats een oefenboek waarin wiskundige vaardigheden (rekenvaardigheid, formulevaardigheid,...) centraal staan, en dat heel goed voor zelfstudie kan gebruikt worden.

Hoofdstuk 4

Afgeleiden en differentiaalrekening

Differentiaalrekening, of het rekenen met afgeleiden, is één van de belangrijkste wiskundige instrumenten die de econoom nodig heeft. Afgeleiden spelen niet alleen een rol in allerlei optimalisatieproblemen, ze liggen ook aan de basis van allerlei typische economische grootheden zoals "elasticiteit" en "marginale kosten" of "marginale opbrengst".

In dit hoofdstuk zullen we de afgeleide van een functie wiskundig invoeren. Rekenregels en expliciete afgeleiden van klassieke functies worden opgesteld. Enkele belangrijke eigenschappen van afgeleiden worden besproken aan de hand van stellingen, en als toepassing leiden we de regel van de L'Hospital af voor bepaling van zekere limieten. Verder wordt er in dit hoofdstuk veel aandacht besteed aan het begrip "elasticiteit van een functie."

4.1 Afgeleide van een functie

4.1.1 Afgeleide van een functie in een punt

Beschouw een functie f en een punt x_0 zodanig dat f gedefinieerd is in een open interval dat x_0 bevat. Bij een toename $h = \Delta_h x_0$ van het argument x_0 zal de functie veranderen over een waarde $\Delta_h f(x_0) = f(x_0 + h) - f(x_0)$. Het quotiënt van deze twee grootheden noemt men *het differentiequotiënt van de functie f in x_0* voor een toename h. Dit wordt dus gegeven door

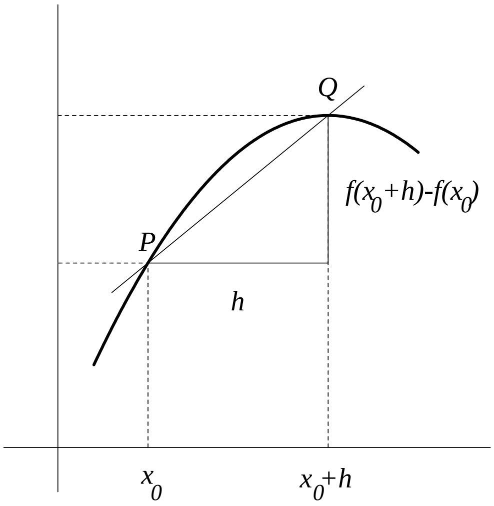
$$\frac{\Delta_h f(x_0)}{\Delta_h x_0} = \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}. \tag{4.1}$$

In een grafiek van de functie f wordt de betekenis van het differentiequotiënt duidelijk. Beschouw een punt P op de grafiek van f met coördinaten $(x_0, f(x_0))$, en een punt Q met coördinaten $(x_0 + h, f(x_0 + h))$. Het is duidelijk uit Figuur 4.1 dat het differentiequotiënt (4.1) gegeven wordt door de richtingscoëfficiënt van de koorde PQ.

Onderstel nu dat de limiet van het differentiequotiënt voor h gaande naar 0 bestaat en eigenlijk is, m.a.w. dat

$$\lim_{h\to 0} \frac{\Delta_h f(x_0)}{\Delta_h x_0} = \lim_{h\to 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} \tag{4.2}$$

Figuur 4.1: Differentiequotiënt van f in x_0.



bestaat en tot $\mathbb{R}$ behoort. Dan zeggen we dat f *afleidbaar* (of differentieerbaar) is in het punt x_0, en de limietwaarde is per definitie de *afgeleide* van f in het punt x_0. Deze wordt als volgt genoteerd :

$$f'(x_0) = \frac{df}{dx}(x_0) = \lim_{h\to 0} \frac{\Delta_h f(x_0)}{\Delta_h x_0} = \lim_{h\to 0} \frac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h}. \tag{4.3}$$

De meetkundige betekenis is duidelijk uit Figuur 4.1 : in het limietproces verplaatst het punt Q zich langs de grafiek van f naar het punt P toe. Vandaar dat de afgeleide $f'(x_0)$ van f in het punt x_0 gelijk is aan *de richtingscoëfficiënt van de raaklijn in P aan de grafiek van f*.

Verder zegt men nog dat f *rechtsafleidbaar* (resp. *linksafleidbaar*) is in x_0 als de rechterlimiet (resp. linkerlimiet) van het differentiequotiënt van f in x_0 voor $h \to 0$ bestaat en eindig is. De limietwaarde heet dan de *rechterafgeleide* (resp. *linkerafgeleide*) van f in x_0, en wordt genoteerd als $f'_R(x_0)$ (resp. $f'_L(x_0)$).

De volgende eigenschappen volgen uit die van limieten :

- als f afleidbaar is in x_0, dan is f ook rechts- en linksafleidbaar in x_0, en de drie afgeleiden zijn gelijk;
- is f links- en rechtsafleidbaar in x_0, dan is f afleidbaar in x_0 als en slechts als de linker- en rechterafgeleide gelijk zijn. Deze gemeenschappelijke waarde is dan tevens de afgeleide van f in x_0.

Als de limiet

$$\lim_{h\to 0} f(x_0+h) - f(x_0)$$

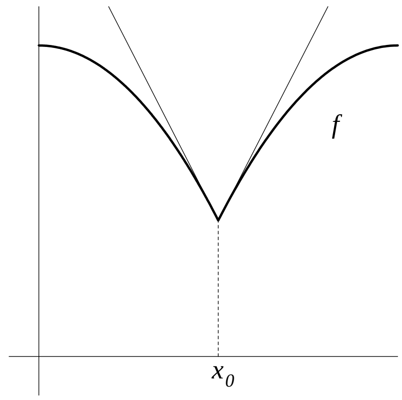
verschillend is van 0 (of niet bestaat), dan is de limiet van het differentiequotiënt oneigenlijk (of bestaat ze niet). Dus geldt :

- als f niet continu is in x_0, dan is f ook niet afleidbaar in x_0;

- als f afleidbaar is in x_0, dan is f ook continu in x_0.

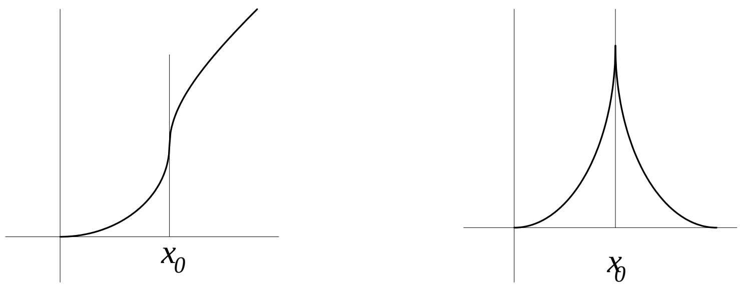
Merk echter op dat de omgekeerde eigenschap niet geldig is : als f continu is in x_0 kan men niet besluiten dat f ook afleidbaar is in x_0. Een voorbeeld daarvan is een functie met een hoekpunt x_0, nl. een punt x_0 waarvoor de linker- en rechterafgeleide van f in x_0 verschillend zijn (zie Figuur 4.2). Een ander voorbeeld daarvan is een functie f die wel

Figuur 4.2: f heeft een hoekpunt in x_0.



continu is in x_0 maar waarvan de limiet (4.3) oneigenlijk wordt. In dit geval heeft f een verticale buigraaklijn in x_0 (als linker- en rechterlimiet er dezelfde oneigenlijke waarde hebben), of heeft f een keerpunt in x_0 (als linker- en rechterlimiet er een tegengestelde oneigenlijke waarde hebben). Deze begrippen worden geïllustreerd in Figuur 4.3.

Figuur 4.3: Een verticale buigraaklijn of een keerpunt.



4.1.2 Afgeleide van een functie in een interval

Een functie f heet *afleidbaar in een interval* I als f afleidbaar is in elk punt van I. Als I een gesloten interval $[a, b]$ is, dan moet deze definitie als volgt worden geïnterpreteerd : f is afleidbaar in elk punt van $]a, b[$, rechtsafleidbaar in a en linksafleidbaar in b.

Als f afleidbaar is in een interval I, dan definieert men de functie f' :

$$f' : I \to \mathbb{R} : x \mapsto f'(x). \tag{4.4}$$

Dit is de *afgeleide functie* van f in I. Als f een elementaire functie is, zullen we zien dat ook f' gemakkelijk kan berekend worden en een elementaire functie is. Beschouw als voorbeeld $f(x) = x^2$ (dan is $I = \mathbb{R}$). Gebruiken we de definitie (4.3) rechtstreeks, dan vinden we

$$f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{(x+h)^2 - x^2}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{2hx + h^2}{h} = \lim_{h \to 0} (2x + h) = 2x.$$

Dit is weer een eenvoudige functie, die in het bijzonder opnieuw afleidbaar is over $\mathbb{R}$. We kunnen het proces dan nogmaals toepassen en de afgeleide van de afgeleide functie beschouwen.

Meer algemeen, als een functie f afleidbaar is in een interval I, en de afgeleide functie f' is eveneens afleidbaar in I, dan zegt men dat f *tweemaal afleidbaar is in* I, en men noemt de afgeleide functie van f' de *tweede afgeleide functie van* f *in* I. De notatie is als volgt :

$$f'' = (f')' = \frac{d^2 f}{dx^2}. \tag{4.5}$$

Als de tweede afgeleide opnieuw afleidbaar is, kan men de derde afgeleide opstellen :

$$f''' = f^{(3)} = (f'')' = \frac{d^3 f}{dx^3}. \tag{4.6}$$

Of meer algemeen, als f $(n-1)$ keer afleidbaar is in I, en de $(n-1)$-ste afgeleide $f^{(n-1)}$ is opnieuw afleidbaar, dan is de n-de afgeleide van f in I gelijk aan de afgeleide van $f^{(n-1)}$ in I :

$$f^{(n)} = (f^{(n-1)})' = \frac{d^n f}{dx^n}. \tag{4.7}$$

4.1.3 Differentiaal van een functie in een punt

Voor de afgeleide van f in x_0 hebben we de notatie $f'(x_0)$ of $\frac{df}{dx}(x_0)$ ingevoerd. Op zich hebben de notaties *df* of *dx* niet echt een betekenis. Nochtans gaat men ze dikwijls gebruiken als "limietwaarden" van de differenties $\Delta_h f(x_0)$ en $\Delta_h x_0$. Verder zullen we uit de eigenschappen voor afgeleiden een aantal regels opstellen waaruit blijkt dat men soms met *df* en *dx* kan rekenen alsof het getallen zijn. In die context noemt men *df* (resp. *dx*) meestal de differentiaal van f (resp. van x).

Wil men het begrip *differentiaal* correct invoeren dan gebeurt dit als volgt

$$df(x_0) : \mathbb{R} \to \mathbb{R} : h \mapsto f'(x_0)h. \tag{4.8}$$

Hierbij moet f natuurlijk afleidbaar zijn in x_0. De differentiaal van f in x_0, $df(x_0)$, is dus een afbeelding die met elk reëel getal h de waarde $f'(x_0)h$ laat corresponderen. We zien onmiddellijk dat $dx(x_0) : h \mapsto h$. Er geldt dan

$$\frac{df(x_0)(h)}{dx(x_0)(h)} = \frac{f'(x_0)h}{h} = f'(x_0). \tag{4.9}$$

Dit verklaart meteen de notatie $\frac{df}{dx}(x_0)$ voor de afgeleide $f'(x_0)$.

Voor de functie $g(x) = x$ geldt in elk punt x_0 dat $dg(x_0)(h) = h$, vandaar dat men dx kan interpreteren als de functie die voor elk punt x_0 de waarde h afbeeldt op h. Daarom kan men (4.8) schrijven als

$$df(x) = f'(x)dx. \tag{4.10}$$

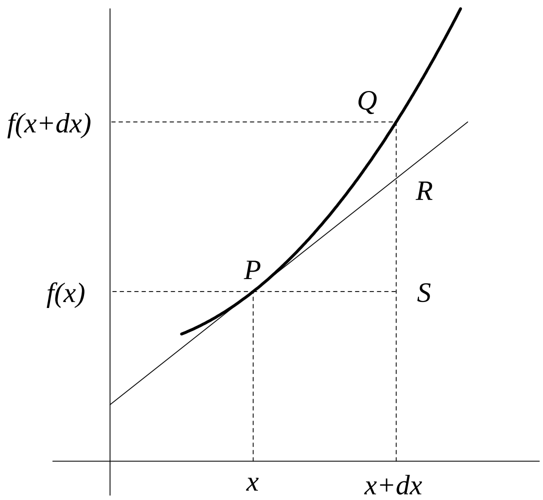
De juiste interpretatie is : df is een functie van twee variabelen, nl. x en $dx = h$, en $df(x)(h) = f'(x)dx = f'(x)h$.

In de praktijk herleidt het bepalen van differentialen zich tot het rekenen met afgeleiden. Bijvoorbeeld, als $f(x) = x^2$, dan is

$$d(x^2) = \frac{d}{dx}(x^2)dx = 2xdx.$$

De differentiaal kan als volgt meetkundig geïnterpreteerd worden, zie figuur 4.4. Stel dat P het punt met coördinaten $(x, f(x))$ voorstelt op de grafiek van f. Als x met

Figuur 4.4: Differentiaal van f : SQ stelt de differentie Δf voor, en SR stelt de differentiaal df voor.



een hoeveelheid dx toeneemt ($dx = h$ is een reële waarde), dan noemen we Q het punt op de grafiek met coördinaten $(x + dx, f(x + dx))$. Het snijpunt van de horizontale door P en de verticale door Q is S. De raaklijn aan f in P snijdt de rechte QS in R. Dan is $\Delta f \equiv \Delta_h f(x) = f(x + dx) - f(x)$ gegeven door de lengte van het lijnstuk SQ. Omdat $df(x) = f'(x)dx$ volgt dat de differentiaal $df \equiv df(x)$ (voor een gegeven dx) gegeven wordt door de lengte van het lijnstuk SR.

4.1.4 Afgeleide functies in de economie

Zoals gewoonlijk stelt q de hoeveelheid van een goed voor. Beschouw een *kostenfunctie* $K : q \mapsto K(q)$; dit is dus een functie die de kost $K(q)$ weergeeft om een hoeveelheid q te produceren. Als de hoeveelheid toeneemt van q_1 tot q_2, dan neemt de kost toe van

$K(q_1)$ tot $K(q_2)$. De verhouding van de toename van de kosten t.o.v. de toename van de productie is dus

$$\frac{K(q_2) - K(q_1)}{q_2 - q_1}.$$

Of nog, als $q_2 = q_1 + h$,

$$\frac{K(q_1 + h) - K(q_1)}{h}.$$

Men definieert dan de *marginale kost* voor de hoeveelheid q_1 als

$$\lim_{h \to 0} \frac{K(q_1 + h) - K(q_1)}{h} = K'(q_1).$$

De *marginale-kostenfunctie* is dus de afgeleide functie K'. Ze geeft aan hoe de toename van de kosten zich gedraagt bij een toename van de hoeveelheid q.

Op identieke manier kan men de *nutsfunctie* en het *marginaal nut* introduceren. Beschouw een *nutsfunctie* $U : q \mapsto U(q)$. Als de hoeveelheid toeneemt van q_1 tot $q_1 + h$, dan neemt het nut toe van $U(q_1)$ tot $U(q_1 + h)$. De verhouding van de toename van het nut t.o.v. de toename van de hoeveelheid is

$$\frac{U(q_1 + h) - U(q_1)}{h}.$$

Men definieert het *marginaal nut* voor de hoeveelheid q_1 als

$$\lim_{h \to 0} \frac{U(q_1 + h) - U(q_1)}{h} = U'(q_1).$$

De *marginale-nutsfunctie* is dus de afgeleide functie U' van de nutsfunctie. Deze meet in feite de neiging van de consument om bij het bezit van de hoeveelheid q nog meer van het goed aan te schaffen.

Een andere klassieke functie is de *opbrengstfunctie* en de *marginale opbrengst*. Herinner je dat de vraagfunctie $q = D(p)$ werd ingevoerd, die voor een gegeven prijs de gevraagde hoeveelheid q van een goed uitdrukt. De inverse vraagfunctie $D^{-1} : q \mapsto D^{-1}(q)$ geeft de prijs aan die gegeven wordt als de hoeveelheid goed gelijk is aan q. Dus de *opbrengst* bij een gegeven hoeveelheid q wordt gegeven door $q \cdot p = q \cdot D^{-1}(q)$. M.a.w. de opbrengstfunctie is

$$R : q \mapsto R(q) = qD^{-1}(q).$$

Men kan de opbrengstfunctie ook beschouwen als functie van de prijs p : $\tilde{R}(p) = pD(p)$. Men definieert de *marginale-opbrengstfunctie* opnieuw als de afgeleide van de opbrengstfunctie (zie later voor de afleidingsregel) :

$$R'(q) = \frac{dR}{dq}(q) = D^{-1}(q) + q\frac{dD^{-1}}{dq}(q).$$

Merk op dat men de marginale-opbrengstfunctie steeds als functie van q beschouwt. Ze geeft de toename van de opbrengst weer t.o.v. toename van de hoeveelheid q voor een gegeven vraagfunctie D.

Merk op dat de opbrengst ook als functie van de gevraagde prijs p kan worden gegeven. Dan heeft ze de gedaante $R(p) = p \cdot D(p)$.

4.2 Enkele rekenregels voor afgeleiden

Het bepalen van de functie f' voor een gegeven functie f noemt men het afleiden van f. Als f een eenvoudige vorm heeft, kan men de afgeleide bepalen aan de hand van een aantal rekenregels die opgesteld worden met behulp van de definitie van afgeleide.

Stelling 4.1 *Stel dat c de constante functie met waarde c is, en dat f en g afleidbare functies zijn in een interval I. Dan geldt :*

- *c is afleidbaar over $\mathbb{R}$ en*
$$c' = \frac{dc}{dx} = 0.$$
- *$f + g$ is afleidbaar en*
$$(f + g)' = f' + g'.$$
- *$f \cdot g$ is afleidbaar en*
$$(f \cdot g)' = f' \cdot g + f \cdot g'.$$
- *f/g is afleidbaar in I (als $g(x) \neq 0$ voor $x \in I$), en*
$$\left(\frac{f}{g}\right)' = \frac{f' \cdot g - f \cdot g'}{g^2}.$$

Bewijs. De eerste twee eigenschappen volgen direct uit de definitie van afgeleide. Voor wat betreft het product van twee functies, komt er

$$\begin{aligned}
(f \cdot g)'(x) &= \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h)g(x+h) - f(x)g(x)}{h} \\
&= \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h)g(x+h) - f(x)g(x+h) + f(x)g(x+h) - f(x)g(x)}{h} \\
&= \lim_{h \to 0} \left(\frac{f(x+h) - f(x)}{h} g(x+h) + f(x) \frac{g(x+h) - g(x)}{h} \right) \\
&= f'(x)g(x) + f(x)g'(x).
\end{aligned}$$

Voor het quotiënt vinden we :

$$\begin{aligned}
\left(\frac{f}{g}\right)'(x) &= \lim_{h \to 0} \frac{\frac{f(x+h)}{g(x+h)} - \frac{f(x)}{g(x)}}{h} \\
&= \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h)g(x) - f(x)g(x+h)}{g(x)g(x+h)h} \\
&= \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h)g(x) - f(x)g(x) - f(x)g(x+h) + f(x)g(x)}{g(x)g(x+h)h} \\
&= \lim_{h \to 0} \frac{\frac{f(x+h)-f(x)}{h} g(x) - f(x) \frac{g(x+h)-g(x)}{h}}{g(x)g(x+h)} \\
&= \frac{f'(x)g(x) - f(x)g'(x)}{g(x)^2}.
\end{aligned}$$

In deze overgangen gebruikten we tevens een aantal eigenschappen van limieten. $\square$

Stelling 4.2 *Als f afleidbaar is in x_0, en g is afleidbaar in $f(x_0)$, dan is $g \circ f$ afleidbaar in x_0, en de* kettingregel *geldt :*

$$(g \circ f)'(x_0) = g'(f(x_0)) \cdot f'(x_0).$$

Bewijs. Stel $f(x_0) = y_0$ en $k(h) = f(x_0 + h) - f(x_0)$. Er geldt

$$(g \circ f)'(x_0) = \lim_{h \to 0} \frac{g(f(x_0 + h)) - g(f(x_0))}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{g(y_0 + k(h)) - g(y_0)}{k(h)} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}.$$

Voor de tweede factor geldt duidelijk dat $\lim_{h \to 0} \frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h} = f'(x_0)$. Beschouwen we vervolgens

$$\lim_{h \to 0} \frac{g(y_0 + k(h)) - g(y_0)}{k(h)}.$$

Omdat $\lim_{h \to 0} k(h) = 0$ (wegens de continuïteit van f in x_0), en $\lim_{y \to 0} \frac{g(y_0+y)-g(y_0)}{y} = g'(y_0)$, volgt er uit de samenstelling van limieten (zie (3.54))

$$\lim_{h \to 0} \frac{g(y_0 + k(h)) - g(y_0)}{k(h)} = g'(y_0).$$

Dit levert dan het gestelde. □

Deze kettingregel kan ook als volgt geformuleerd worden : *is f afleidbaar in I en g afleidbaar in $f(I)$, dan is $g \circ f$ afleidbaar in I en er geldt : $(g \circ f)' = (g' \circ f) \cdot f'$.*

De kettingregel kan uitgebreid worden tot “meerdere schakels”, bijvoorbeeld voor drie functies f, g en h :

$$(h \circ g \circ f)'(x) = h'(g(f(x))) \cdot g'(f(x)) \cdot f'(x).$$

Stelling 4.3 *Als f bijectief is, afleidbaar is in x_0, en $f'(x_0) \neq 0$, dan is de inverse functie f^{-1} afleidbaar in $f(x_0)$, en*

$$(f^{-1})'(f(x_0)) = \frac{1}{f'(x_0)}.$$

Bewijs. Omdat f afleidbaar is in x_0 bestaat de volgende eigenlijke limiet :

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} = f'(x_0).$$

Omdat $f'(x_0) \neq 0$ volgt uit de eigenschappen van limieten dat

$$\lim_{h \to 0} \frac{h}{f(x_0 + h) - f(x_0)} = \frac{1}{f'(x_0)}.$$

Stel opnieuw $f(x_0) = y_0$ en $k(h) = f(x_0 + h) - f(x_0)$. Omdat f en f^{-1} bijecties zijn, geldt $f^{-1}(y_0) = x_0$ en $f^{-1}(y_0 + k(h)) = x_0 + h$. Dus komt er

$$\frac{1}{f'(x_0)} = \lim_{h \to 0} \frac{f^{-1}(y_0 + k(h)) - f^{-1}(y_0)}{k(h)}.$$

Omdat $\lim_{h\to 0} k(h) = 0$ volgt uit de samenstelling van limieten dat de volgende limiet

$$\lim_{y\to 0} \frac{f^{-1}(y_0 + y) - f^{-1}(y_0)}{y}$$

bestaat en gelijk is aan $1/f'(x_0)$. Dus f^{-1} is afleidbaar in $f(x_0)$ en het gestelde is aangetoond. $\square$

Tenslotte beschouwen we nog een gevolg van de regels die tot nu toe bewezen werden. Stel dat we het product van n functies $f_1, f_2, \ldots, f_n$ wensen af te leiden. Door herhaalde toepassing van Stelling 4.1 verkrijgt men

$$(f_1 \cdot f_2 \cdots f_n)' = f_1' \cdot f_2 \cdots f_n + f_1 \cdot f_2' \cdots f_n + \cdots + f_1 \cdot f_2 \cdots f_n'.$$

In het bijzonder, als alle functies gelijk zijn, $f_1 = f_2 = \ldots = f_n = f$, dan vindt men

$$(f^n)' = nf^{n-1} \cdot f'.$$

Zo geldt in het bijzonder voor de machtsfunctie x^n,

$$\frac{dx^n}{dx} = nx^{n-1}. \tag{4.11}$$

Voor de functie x^{-n} ($n \in \mathbb{N}^*$) kan men als volgt tewerk gaan :

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dx}x^{-n} &= \lim_{h\to 0} \frac{\frac{1}{(x+h)^n} - \frac{1}{x^n}}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{x^n - (x+h)^n}{(x+h)^n x^n h} \\
&= \lim_{h\to 0} \frac{x^n - (x+h)^n}{h} \lim_{h\to 0} \frac{1}{(x+h)^n x^n} = -nx^{n-1}\frac{1}{x^{2n}} = -nx^{-n-1}.
\end{aligned}$$

Voor de n-de machtsfunctie $x^{\frac{1}{n}}$ kunnen we de afgeleide berekenen aan de hand van stelling 4.3 (neem aan dat $x > 0$ voor n even). Als $y = f(x) = x^n$, dan is $f'(x_0) = nx_0^{n-1}$, en

$$x = f^{-1}(y) = y^{\frac{1}{n}}.$$

Dus levert stelling 4.3 :

$$(f^{-1})'(y_0) = \frac{1}{f'(x_0)} = \frac{1}{nx_0^{n-1}} = \frac{1}{ny_0^{\frac{n-1}{n}}}.$$

Vandaar dat

$$\frac{d}{dx}x^{\frac{1}{n}} = \frac{1}{nx^{\frac{n-1}{n}}} = \frac{1}{n}x^{\frac{1}{n}-1}. \tag{4.12}$$

Om nu de afgeleide van $x^{\frac{m}{n}}$ te bepalen, kan men (4.11), (4.12), en de kettingregel gebruiken. Dit resulteert in :

$$\frac{d}{dx}x^{\frac{m}{n}} = \frac{m}{n}x^{\frac{m}{n}-1},$$

of samenvattend :

$$\frac{d}{dx}x^{\alpha} = \alpha x^{\alpha-1}.$$

4.3 Afgeleiden van goniometrische en cyclometrische functies

4.3.1 De goniometrische functies

Enkele basiseigenschappen van de goniometrische functies werden reeds besproken in paragraaf 2.5.5 . Om de afgeleide van sin te berekenen, beschouw

$$\lim_{h\to 0}\frac{\sin(x_0+h)-\sin(x_0)}{h}.$$

We maken vervolgens gebruik van (2.12) en (3.41) :

$$\begin{aligned}\lim_{h\to 0}\frac{\sin(x_0+h)-\sin(x_0)}{h} &= \lim_{h\to 0}\frac{2\sin(\frac{h}{2})\cos(x_0+\frac{h}{2})}{h}\\ &= \lim_{h\to 0}\frac{2\sin(\frac{h}{2})}{h}\lim_{h\to 0}\cos(x_0+\frac{h}{2}) = \cos(x_0).\end{aligned}$$

Dus sin is afleidbaar voor elke $x_0 \in \mathbb{R}$ en $\sin'(x_0) = \cos(x_0)$. Of nog,

$$\sin'(x) = \frac{d}{dx}\sin(x) = \cos(x).$$

De afgeleide van cos kan op analoge manier berekend worden. Of men kan gebruik maken van $\cos(x_0) = \sin(x_0 + \frac{\pi}{2})$:

$$\frac{d}{dx}\cos(x_0) = \frac{d}{dx}\sin(x_0+\frac{\pi}{2}) = \cos(x_0+\frac{\pi}{2}) = -\sin(x_0).$$

Dus

$$\cos'(x) = \frac{d}{dx}\cos(x) = -\sin(x).$$

Om de afgeleiden van tan en cot te berekenen, maakt men gebruik van de goniometrische grondformules en de rekenregels voor afgeleiden. Zo zijn tan en cot afleidbaar in elk punt van hun definitieverzameling. Als voorbeeld berekenen we

$$\frac{d}{dx}\tan(x) = \frac{d}{dx}\left(\frac{\sin(x)}{\cos(x)}\right) = \frac{\sin'(x)\cos(x)-\sin(x)\cos'(x)}{\cos^2(x)} = \frac{1}{\cos^2(x)}.$$

En eveneens :

$$\cot'(x) = -\frac{1}{\sin^2(x)}.$$

4.3.2 De cyclometrische functies

Een aantal basiseigenschappen van de cyclometrische functies werden reeds eerder besproken. Om hun afgeleiden te berekenen, kunnen we stelling 4.3 gebruiken. In het bijzonder, beschouw de functie $\sin|_{[-\pi/2,\pi/2]}$, die een bijectie is van $[-\pi/2, \pi/2]$ op $[-1, 1]$. Deze functie is afleidbaar in elk punt x_0 van haar definitiegebied, en

$$\frac{d}{dx} \sin|_{[-\pi/2,\pi/2]}(x_0) = \cos(x_0).$$

Deze waarde is verschillend van 0, behalve als $x_0 = -\pi/2$ of $x_0 = \pi/2$. Dus stelling 4.3 kan toegepast worden voor $I =]-\pi/2, \pi/2[$. Stellen we $y_0 = \sin(x_0)$ (zodat $x_0 = \arcsin(y_0)$), dan levert dit

$$\arcsin'(y_0) = \frac{1}{\sin'(x_0)} = \frac{1}{\cos(x_0)} = \frac{1}{\sqrt{1-\sin^2(x_0)}} = \frac{1}{\sqrt{1-y_0^2}}.$$

Hierin werd rekening gehouden met een aantal eigenschappen van sin en cos. We besluiten dus : arcsin is afleidbaar in $]-1, 1[$ en de afgeleide wordt gegeven door

$$\arcsin'(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}.$$

De functie $\cos|_{[0,\pi]}$ is een bijectie is van $[0, \pi]$ op $[-1, 1]$. Deze functie is afleidbaar in elk punt x_0 van $[0, \pi]$ en

$$\frac{d}{dx} \cos|_{[0,\pi]}(x_0) = -\sin(x_0).$$

Deze waarde is verschillend van 0 zolang $x_0 \neq 0$ of $x_0 \neq \pi$. Om stelling 4.3 toe te passen op $I =]0, \pi[$, stellen we $y_0 = \cos(x_0)$ (zodat $x_0 = \arccos(y_0)$), en

$$\arccos'(y_0) = \frac{1}{\cos'(x_0)} = -\frac{1}{\sin(x_0)} = -\frac{1}{\sqrt{1-\cos^2(x_0)}} = -\frac{1}{\sqrt{1-y_0^2}}.$$

We besluiten : arccos is afleidbaar in $]-1, 1[$ en de afgeleide wordt gegeven door

$$\arccos'(x) = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}.$$

De functie $\tan|_{]-\pi/2,\pi/2[}$ is een bijectie van $]-\pi/2, \pi/2[$ op $\mathbb{R}$. Deze functie is afleidbaar in elk punt x_0 van haar definitiegebied, en

$$\frac{d}{dx} \tan|_{]-\pi/2,\pi/2[}(x_0) = \frac{1}{\cos^2(x_0)}.$$

Deze waarde is steeds verschillend van 0 zodat stelling 4.3 kan toegepast worden op $I =]-\pi/2, \pi/2[$. Stellen we $y_0 = \tan(x_0)$ (zodat $x_0 = \arctan(y_0)$), dan is

$$\arctan'(y_0) = \frac{1}{\tan'(x_0)} = \cos^2(x_0) = \frac{1}{1+\tan^2(x_0)} = \frac{1}{1+y_0^2}.$$

We besluiten : arctan is afleidbaar in $\mathbb{R}$ en de afgeleide wordt gegeven door

$$\arctan'(x) = \frac{1}{1+x^2}.$$

Op volledig analoge manier vindt men dat arccot afleidbaar is in $\mathbb{R}$ en

$$\text{arccot}'(x) = -\frac{1}{1+x^2}.$$

4.4 Afgeleiden van logaritmische en exponentiële functies, en toepassingen

4.4.1 Berekenen van de afgeleiden

Beschouw vooreerst de natuurlijke logaritmische functie ln. Haar afgeleide berekenen we aan de hand van ($x_0 \in \mathbb{R}_+^*$)

$$\lim_{h\to 0}\frac{\ln(x_0+h)-\ln(x_0)}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{\ln(1+\frac{h}{x_0})}{\frac{h}{x_0}}\frac{1}{x_0} = \frac{1}{x_0}\lim_{t\to 0}\frac{\ln(1+t)}{t} = \frac{1}{x_0}.$$

Hierbij gebruikten we o.a. de speciale limiet (3.61). Dus, de natuurlijke logaritmische functie is afleidbaar in elk punt van haar definitiegebied, en

$$\ln'(x) = \frac{1}{x}.$$

Vermits voor een gegeven grondtal a geldt dat

$$\log_a(x) = \frac{1}{\ln(a)}\ln(x),$$

volgt er dat ook $\log_a$ afleidbaar is in $\mathbb{R}_+^*$, en

$$\log_a'(x) = \frac{1}{\ln(a)}\frac{1}{x}.$$

Voor een willekeurige functie f beschouwt men soms de *logaritmische afgeleide* van f. Per definitie is dit de afgeleide functie van $\ln\circ|f|$, i.e. $(\ln\circ|f|)'$. Voor punten waar f nul wordt is deze logaritmische afgeleide niet gedefinieerd. Stel dat $f(x) > 0$ voor een x-waarde; dan komt er met behulp van de kettingregel

$$(\ln\circ|f|)'(x) = (\ln\circ f)'(x) = \frac{1}{f(x)}f'(x).$$

Ook als $f(x) < 0$ kan men de logaritmische afgeleide op deze manier berekenen, zodat er komt :

$$f(x)\neq 0 \Rightarrow (\ln\circ|f|)'(x) = \frac{f'(x)}{f(x)}.$$

Vervolgens beschouwen we de exponentiële functie $\exp_a$ (met grondtal a). Berekening van de volgende limiet, voor $x_0 \in \mathbb{R}$, geeft

$$\lim_{h\to 0}\frac{\exp_a(x_0+h)-\exp_a(x_0)}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{a^{x_0}(a^h-1)}{h} = a^{x_0}\lim_{h\to 0}\frac{a^h-1}{h} = a^{x_0}\ln(a),$$

waarbij (3.63) werd gebruikt. Er volgt dus dat $\exp_a$ afleidbaar is over $\mathbb{R}$, en

$$\exp_a'(x) = \ln(a)\exp_a(x).$$

In het bijzonder, voor de natuurlijke exponentiële functie met grondtal $a = e$ geldt :

$$\exp'(x) = \exp(x).$$

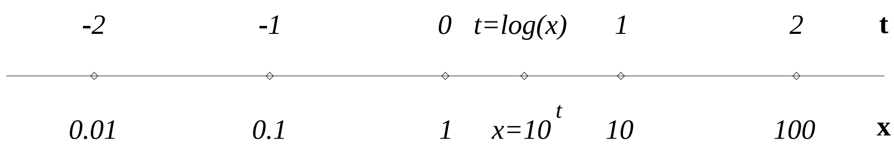
4.4.2 Logaritmische coördinatenstelsels

In Hoofdstuk 1 maakten we kennis met de gewone getallenrechte. Men verwijst naar zo'n getallenrechte soms als een rechte met een *lineaire schaal*; immers, de afstand tussen twee willekeurige punten is lineair evenredig met het verschil tussen de corresponderende reële getallen die met de punten overeenstemmen.

Soms is het zinvol om over te gaan op een zgn. *logaritmische getallenrechte*. Bij een logaritmische schaal worden de verdelingen en getallen geplaatst overeenkomstig de waarden van hun logaritmen; meestal gebruikt men hier de logaritmische functie met grondtal 10 ($\log \equiv \log_{10}$). Het definitiegebied van deze functie is $\mathbb{R}^*_+$, dus er kunnen enkel positieve reële getallen voorgesteld worden op deze logaritmische getallenrechte.

Concreet wordt dit als volgt uitgevoerd. Beschouw een gewone getallenrechte, waarop met elk punt P een reëel getal t correspondeert. De nieuwe schaalverdeling laat met elk zo'n punt P het getal $x = 10^t$ corresponderen. Dit proces wordt geïllustreerd in Figuur 4.5. Op de logaritmische getallenrechte kan men de oorsprong in principe om het

Figuur 4.5: De logaritmische getallenrechte.



even waar kiezen; dit zal in de praktijk afhangen van de grootte-orde van de data die men wenst te representeren in een logaritmisch coördinatenstelsel.

De eigenschappen van de waarden op een logaritmische getallenrechte kan men afleiden uit die van de logaritmische en exponentiële functies. Als bijvoorbeeld $t = t_1 + t_2$, dan geldt

$$x = 10^t = 10^{t_1+t_2} = 10^{t_1} \cdot 10^{t_2} = x_1 \cdot x_2.$$

In het bijzonder, als men op de logaritmische schaal de afstand tussen het punt corresponderend met 1 en het punt corresponderend met x verdubbelt, vindt men het punt met logaritmische coördinaat x^2.

In de praktijk worden logaritmische getallenrechten gebruikt om een functie voor te stellen in een logaritmisch coördinatenstelsel. Een logaritmisch coördinatenstelsel bestaat uit twee orthogonale rechten, waarvan de ene een logaritmische schaal bezit, en de andere ofwel een lineaire schaal ofwel ook een logaritmische schaal. In het eerste geval spreekt men van een *enkel- of semilogaritmisch coördinatenstelsel*; in het andere geval van een *dubbel- of (vol)logaritmisch coördinatenstelsel.* Voor toepassingen gebruikte men meestal speciaal grafiekpapier waarop de logaritmische schaalverdelingen reeds zijn aangebracht, het zgn. logaritmisch papier.

Het nut van logaritmische schaalverdelingen wordt pas duidelijk als men grafieken beschouwt van functies met een exponentieel gedrag. In een klassiek (affien of Euclidisch) coördinatenstelsel stijgt (of daalt) de grafiek van een exponentiële functie zo snel dat men binnen de beperkte ruimte waarover men in de praktijk beschikt slechts een klein deel van de functie kan weergeven. In logaritmische coördinatenstelsels wordt de voorstelling heel anders.

Beschouw als eerste voorbeeld een semilogaritmisch coördinatenstelsel waarvoor de **x**-as een gewone getallenrechte voorstelt (dus met lineaire schaal), en de **y**-as een logaritmische getallenrechte is (dus met $y = 10^t$, waarbij t naar de lineaire verdeling op de **y**-as refereert). Een punt P met coördinaten (x, y) heeft dan de affiene coördinaten $(x, t = \log_{10} y)$. Stel dat we de grafiek van een functie $y = f(x)$ wensen voor te stellen in dit semilogaritmisch coördinatenstelsel. In het corresponderend affien coördinatenstelsel is dit de grafiek van

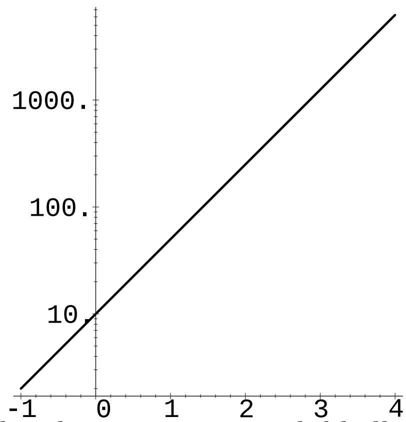
$$t = \log_{10} y = \log_{10} f(x) = (\log_{10} \circ f)(x).$$

In het bijzonder, als f een exponentiële functie van de vorm $f(x) = ca^x$ is ($a, c > 0$, $a \neq 1$), dan wordt de grafiek van f in het semilogaritmisch coördinatenstelsel bepaald door

$$t = \log_{10}(ca^x) = (\log_{10} a)x + \log_{10} c,$$

m.a.w. dit is de grafiek van een rechte. Exponentiële functies worden in een semilogaritmisch coördinatenstelsel dus voorgesteld door rechten. Ter illustratie wordt in Figuur 4.6 de grafiek van $f(x) = 10 \cdot 5^x$ gegeven.

Figuur 4.6: Grafiek van $f(x) = 10 \cdot 5^x$ in een semilogaritmisch coördinatenstelsel.



Als tweede voorbeeld beschouwen we een dubbellogaritmisch coördinatenstelsel, waarvoor zowel de **x**-as en de **y**-as een logaritmische getallenrechte voorstellen. Dan is $x = 10^s$, met s een lineaire schaal op de **x**-as, en $y = 10^t$, waarbij t naar de lineaire verdeling op de **y**-as verwijst. Merk op dat nu zowel x als y positieve getallen moeten zijn. Een punt P met coördinaten (x, y) heeft dan de affiene coördinaten $(s = \log_{10} x, t = \log_{10} y)$. We wensen opnieuw de grafiek van een functie $y = f(x)$ voor te stellen in dit dubbellogaritmisch coördinatenstelsel. In het corresponderend affien coördinatenstelsel is dit de grafiek van

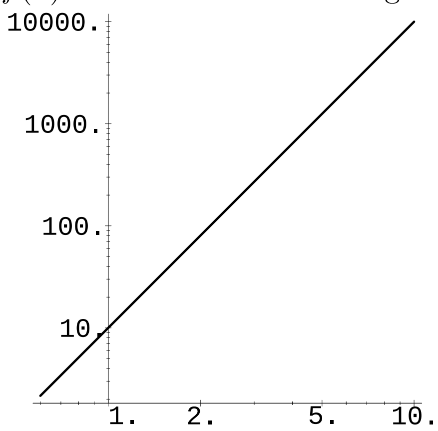
$$t = \log_{10} y = \log_{10} f(x) = \log_{10} f(10^s) = (\log_{10} \circ f \circ \exp_{10})(s).$$

In het bijzonder, als f een n-de machtsfunctie van de vorm $f(x) = cx^n$ is $(c, x > 0)$, dan wordt de grafiek van f in het dubbellogaritmisch coördinatenstelsel bepaald door

$$t = \log_{10}(c \cdot x^n) = \log_{10}(c \cdot 10^{ns}) = n \cdot s + \log_{10}(c),$$

m.a.w. dit is de grafiek van een rechte. Machtsfuncties worden in een dubbellogaritmisch coördinatenstelsel dus voorgesteld door rechten. Ter illustratie geven we in Figuur 4.7 de grafiek van $f(x) = 10x^3$.

Figuur 4.7: Grafiek van $f(x) = 10x^3$ in een dubbellogaritmisch coördinatenstelsel.



4.5 Elasticiteit van een functie

4.5.1 Definitie van elasticiteit

Beschouw een functie f en een getal x_0 dat tot het definitiegebied van f behoort. Als het argument x_0 met een (kleine) waarde h toeneemt, dan is de relatieve toename van x_0 gelijk aan

$$\frac{(x_0 + h) - x_0}{x_0} = \frac{h}{x_0} = \frac{\Delta_h x_0}{x_0}.$$

Ten gevolge hiervan is de *relatieve toename van f in x_0* gelijk aan

$$\frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{f(x_0)} = \frac{\Delta_h f(x_0)}{f(x_0)}.$$

Opdat beide grootheden zouden gedefineerd zijn moet $x_0 \neq 0$ en $f(x_0) \neq 0$, wat in deze context meestal het geval is.

Het quotiënt van deze twee grootheden drukt de afhankelijkheid uit van een relatieve toename van $f(x_0)$ bij een relatieve toename van x_0. Men noemt dit quotiënt de *boogelasticiteit* voor de waarden $(x_0, x_0 + h)$. Als de limiet van dit quotiënt voor $h \to 0$ bestaat, noemt men deze limiet de *elasticiteit van de functie f in x_0*, en men noteert dit als $\frac{Ef}{Ex}(x_0)$. Dus

$$\frac{Ef}{Ex}(x_0) = \lim_{h \to 0} \frac{\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{f(x_0)}}{\frac{h}{x_0}}. \tag{4.13}$$

Als f afleidbaar is in x_0, en $f(x_0) \neq 0$, dan bestaat deze limiet en wordt ze gegeven door

$$\frac{Ef}{Ex}(x_0) = \lim_{h\to 0} \frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{f(x_0)} \frac{x_0}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h} \frac{x_0}{f(x_0)} = x_0 \frac{f'(x_0)}{f(x_0)}.$$

De elasticiteit van f in x_0 is dan het product van x_0 met de logaritmische afgeleide van f in x_0.

Men zegt dat f *elastisch* (resp. *inelastisch*) is in x_0 als

$$|\frac{Ef}{Ex}(x_0)| > 1, \qquad \text{resp. } |\frac{Ef}{Ex}(x_0)| < 1.$$

Als een functie elastisch is in x_0 is de relatieve toename van f in x_0 dus groter dan de relatieve toename in x_0 zelf, vandaar de term “elastisch”.

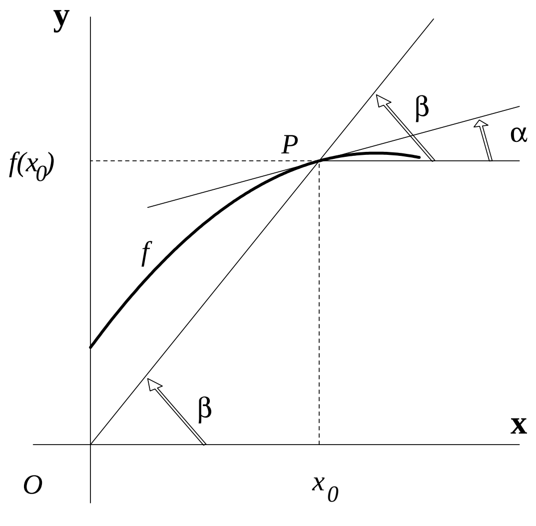
Als de elasticiteit van f gedefinieerd is in een interval I, dan is $\frac{Ef}{Ex}$ de elasticiteitsfunctie van f in I :

$$\frac{Ef}{Ex}(x) = x\frac{f'(x)}{f(x)}, \qquad \forall x \in I. \tag{4.14}$$

Om de elasticiteit van f in bepaalde punten te berekenen, kan men eerst de elasticiteitsfunctie $\frac{Ef}{Ex}$ bepalen en deze dan evalueren in de punten. Zo gaat men trouwens ook tewerk bij afgeleiden : om de afgeleide van f in bepaalde punten te bepalen, berekent men eerst de afgeleide functie f', en vervolgens bepaalt men de waarde van f' in die punten.

Om de meetkundige betekenis van elasticiteit in te zien beschouwt men de grafiek van een functie f, zie Figuur 4.8. Een punt P op de grafiek van f heeft coördinaten

Figuur 4.8: Meetkundige betekenis van elasticiteit.



$(x_0, f(x_0))$. We weten reeds dat $f'(x_0)$ de richtingscoëfficiënt van de raaklijn in P aan de grafiek van f voorstelt, of nog : $f'(x_0) = \tan\alpha$. Anderzijds is $\frac{f(x_0)}{x_0}$ gelijk aan de richtingscoëfficiënt van de voerstraal OP door de oorsprong O en het punt P, m.a.w. $\frac{f(x_0)}{x_0} = \tan\beta$. Bijgevolg geldt voor de elasticiteit van f in x_0 :

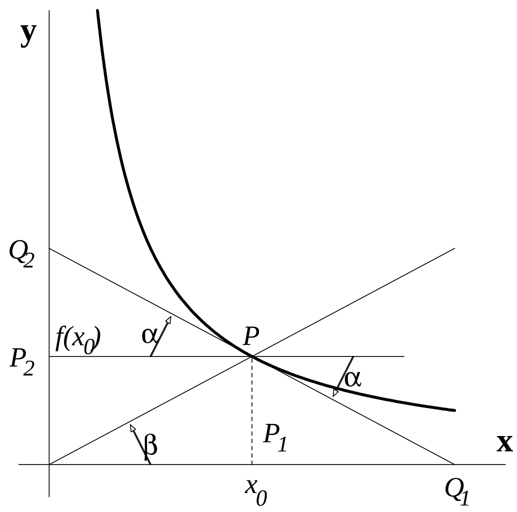
$$\frac{Ef}{Ex}(x_0) = \frac{f'(x_0)}{\frac{f(x_0)}{x_0}} = \frac{\tan\alpha}{\tan\beta}. \tag{4.15}$$

Hieruit kan men een aantal eenvoudige eigenschappen van elasticiteit afleiden. Neem aan dat de grafiek van f in het eerste kwadrant ligt, m.a.w. dat $x_0 > 0$ en $f(x_0) > 0$ (wat gewoonlijk het geval is voor economische toepassingen). Dan geldt :

- de elasticiteit is positief (resp. negatief) als f een stijgende (resp. een dalende) functie is;
- als $|\alpha| > \beta$ in x_0 dan is de functie elastisch in x_0; als $|\alpha| < \beta$ dan is de functie inelastisch;
- de elasticiteit van f in x_0 is 1 als en slechts als de raaklijn in P samenvalt met de voerstraal OP, m.a.w. als de raaklijn in P door de oorsprong gaat.

De elasticiteit kan ook op een andere manier grafisch bepaald worden. Beschouw hiertoe Figuur 4.9, met de grafiek van $f(x)$ gelegen in het eerste kwadrant en f dalend. Stel door

Figuur 4.9: Nog een meetkundige interpretatie van elasticiteit.



P_1 en P_2 de projecties van een punt P van de grafiek van f op de **x**-as en **y**-as voor, en zij Q_1 en Q_2 de snijpunten van de raaklijn in P met de assen. Dan wordt de elasticiteit in het punt P gegeven door :

$$\frac{\tan\alpha}{\tan\beta} = \frac{-|Q_2P_2|/|P_2P|}{|PP_1|/|OP_1|} = -\frac{|Q_2P_2|}{|OP_2|},$$

of nog, omdat een evenwijdige projectie op de raaklijn de verhoudingen bewaart, door

$$-\frac{|PQ_2|}{|PQ_1|}.$$

Beschouw als voorbeeld een vraagfunctie $q = D(p)$, gegeven door

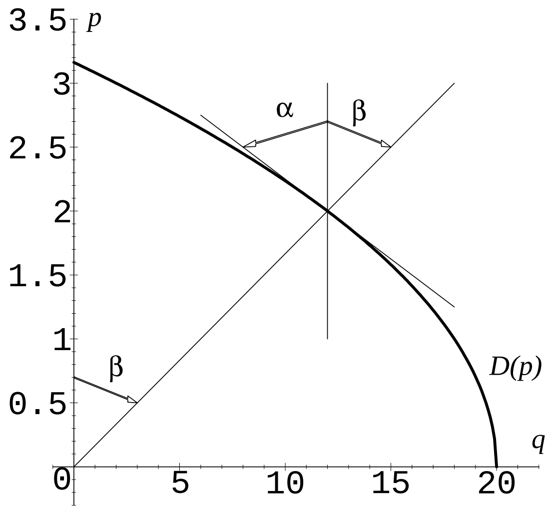
$$q = D(p) = -2p^2 + 20,$$

zodat de economisch relevante definitieverzameling van D het interval $[0, \sqrt{10}]$ is. Men vindt gemakkelijk

$$\frac{ED}{Ep}(p) = p\frac{-4p}{-2p^2+20} = \frac{-2p^2}{10-p^2}.$$

Voor $p = 2$ is de elasticiteit $-4/3$. Uit de grafiek van $D(p)$ (Figuur 4.10) ziet men dat de elasticiteit overal negatief is. Verder is het gemakkelijk in te zien dat de vraagfunctie

Figuur 4.10: Elasticiteit van de vraagfunctie $D(p)$.



elastisch is voor $p > \sqrt{10/3}$, en inelastisch voor $p < \sqrt{10/3}$.

4.5.2 Eigenschappen van elasticiteit

Stelling 4.4 *De elasticiteit van f in x_0 ($x_0 > 0$) is gelijk aan de richtingscoëfficiënt van de raaklijn aan de dubbellogaritmische grafiek van $|f|$ in x_0.*

Bewijs. Beschouw de dubbellogaritmische grafiek van $|f|$. In het dubbellogaritmisch coördinatenstelsel correspondeert de logaritmische schaal $x = 10^s$ met de lineaire schaal s, en de logaritmische schaal $y = 10^t$ met de lineaire schaal t. De dubbellogaritmische grafiek van $y = |f(x)|$ is dan de grafiek van $t = \log_{10}(|f(10^s)|)$. De richtingscoëfficiënt van de raaklijn in het punt s_0 wordt gegeven door de afgeleide naar s (beschouw hier het geval $f(x_0) > 0$; voor $f(x_0) < 0$ verloopt de berekening analoog) :

$$\frac{d}{ds}(\log_{10} \circ f \circ \exp_{10})(s_0) = \frac{1}{\ln(10)} \frac{1}{f(10^{s_0})} \cdot f'(10^{s_0}) \cdot \ln(10) \exp_{10}(s_0) = x_0 \frac{f'(x_0)}{f(x_0)},$$

en dit is precies de elasticiteit van f in x_0. □

Net zoals voor afgeleiden kan men ook voor elasticiteitsfuncties een aantal rekenregels opstellen. Al deze regels kan men eenvoudig deduceren uit die voor afgeleiden.

1. De elasticiteit van de constante functie met waarde c is nul :

$$\frac{Ec}{Ex} = 0.$$

2. De elasticiteit van de identieke functie $f(x) = x$ is 1 :

$$\frac{Ex}{Ex} = 1.$$

3. Voor de somfunctie geldt

$$\frac{E(f+g)}{Ex} = \frac{f\frac{Ef}{Ex} + g\frac{Eg}{Ex}}{f+g},$$

zodat de elasticiteit van $f + g$ gelijk is aan het gewogen gemiddelde van de elasticiteiten van f en g, waarbij de gewichten evenredig zijn met f en g.

4. Voor de productfunctie geldt

$$\frac{E(f \cdot g)}{Ex} = \frac{Ef}{Ex} + \frac{Eg}{Ex},$$

dus de elasticiteit van $f \cdot g$ is gelijk aan de som van de elasticiteiten van f en g.

5. Voor de quotiëntfunctie geldt

$$\frac{E(\frac{f}{g})}{Ex} = \frac{Ef}{Ex} - \frac{Eg}{Ex},$$

dus de elasticiteit van f/g is gelijk aan het verschil van de elasticiteiten van f en g.

6. Voor de samengestelde functie geldt $(y = f(x))$

$$\frac{E(g \circ f)}{Ex} = \left(\frac{Eg}{Ey} \circ f\right) \frac{Ef}{Ex}.$$

7. Voor de inverse functie geldt

$$\frac{Ef^{-1}}{Ey} \circ f = \frac{1}{\frac{Ef}{Ex}}.$$

8. De elasticiteit van een machtsfunctie is constant, en is gelijk aan de exponent :

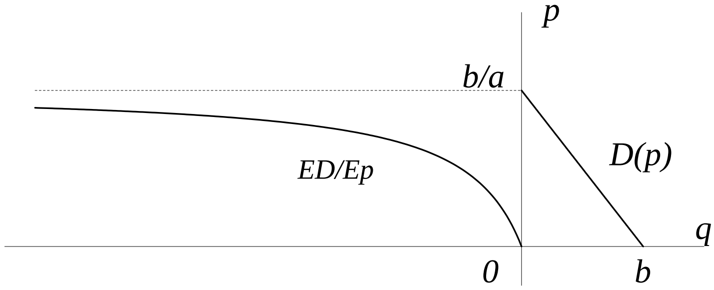
$$\frac{E(ax^b)}{Ex} = b.$$

Men zegt daarom dat machtsfuncties iso-elastische functies zijn.

9. De elasticiteit van een exponentiële functie is lineair :

$$\frac{E(ae^{bx})}{Ex} = bx.$$

Figuur 4.11: De lineaire vraagfunctie $D(p)$ en de bijhorende prijselasticiteitsfuncties.



4.5.3 Toepassingen van elasticiteit in de economie

4.5.3.1 Prijselasticiteit van de lineaire vraagfunctie

Stel dat de lineaire vraagfunctie gegeven wordt door

$$D : p \mapsto q = D(p) = -ap + b,$$

met $a, b > 0$, en $p, q \geq 0$, zodat de economisch relevante definitieverzameling $[0, b/a]$ is, en de functiewaarde daalt van b tot 0. Zoals gebruikelijk in deze context wordt de p-as verticaal getekend, en de q-as horizontaal, zie Figuur 4.11. De elasticiteit van D berekent men uit de formule (4.14),

$$\frac{ED}{Ep}(p) = \frac{-ap}{-ap+b} = \frac{p}{p - \frac{b}{a}}.$$

De grafiek van deze functie is een hyperbooltak, beperkt tot het interval $[0, b/a[$. Voor $p = 0$ is de elasticiteit 0, en voor $p \to b/a$ nadert de elasticiteit naar $-\infty$. Men kan deze grafiek voorstellen in hetzelfde coördinatenstelsel waarin de grafiek van $D(p)$ werd voorgesteld, zie Figuur 4.11. Als de prijs evolueert van 0 tot b/a, evolueert de corresponderende prijselasticiteit van 0 tot $-\infty$. Als men voor een gegeven prijs p de rechte evenwijdig met de q-as tekent gaande door p op de p-as, dan vindt men als snijpunt met de grafiek van $D(p)$ de corresponderende gevraagde hoeveelheid q, en als snijpunt met de grafiek van $\frac{ED}{Ep}(p)$ de corresponderende prijselasticiteit. Het volgende is gemakkelijk na te gaan (ofwel grafisch, ofwel m.b.v. de formule) :

- de elasticiteit is -1 voor $p = \frac{b}{2a}$;
- voor $0 < p < \frac{b}{2a}$ is de vraag inelastisch;
- voor $\frac{b}{2a} < p < \frac{b}{a}$ is de vraag elastisch.

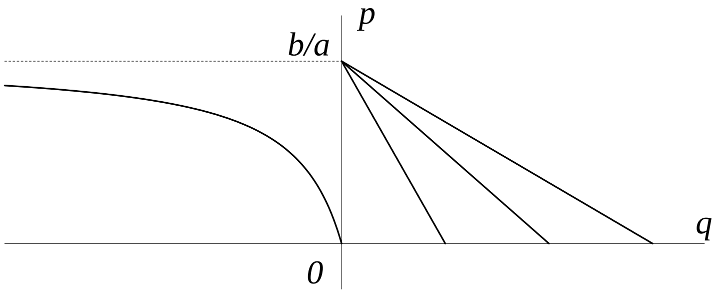
Voor toepassingen is het nuttig om de elasticiteiten voor een zelfde prijs te vergelijken voor verschillende exemplaren uit een familie lineaire vraagfuncties. Men onderscheidt gewoonlijk drie families.

Als eerste familie, beschouwt men *de vraagrechten met b/a constant.* Deze rechten gaan door het vaste snijpunt b/a met de p-as, en de verzameling vraagrechten wordt beschreven door

$$D_t(p) = -atp + bt,$$

waarbij t een positieve reële parameter is. Toepassen van de formule toont dat al deze vraagrechten dezelfde elasticiteitsfunctie hebben. In Figuur 4.12 wordt dit geïllustreerd.

Figuur 4.12: Een familie vraagfuncties met b/a constant, en de bijhorende prijselasticiteitsfunctie.



Als tweede familie beschouwt men *de vraagrechten met b constant.* Deze rechten gaan door het vaste snijpunt b met de q-as, en de verzameling vraagrechten wordt beschreven door

$$D_a(p) = -ap + b,$$

waarbij nu a als positieve reële parameter kan beschouwd worden. De elasticiteitsfunctie wordt gegeven door

$$\frac{ED_a}{Ep} = \frac{p}{p - \frac{b}{a}},$$

en de afgeleide naar a van deze elasticiteitsfunctie is

$$\frac{d}{da}\frac{ED_a}{Ep} = \frac{-bp}{(ap-b)^2}.$$

Deze functie is negatief, zodat de elasticiteit een dalende functie is van a. Als a groter wordt (d.i. de vraagrechte komt dichter bij de oorsprong te liggen), dan wordt de elasticiteit voor eenzelfde p kleiner (meer negatief dus), en wordt de vraag dus meer elastisch. Dit fenomeen wordt geïllustreerd in Figuur 4.13, waar enkele vraagrechten en hun bijhorende elasticiteitsfuncties gegeven zijn.

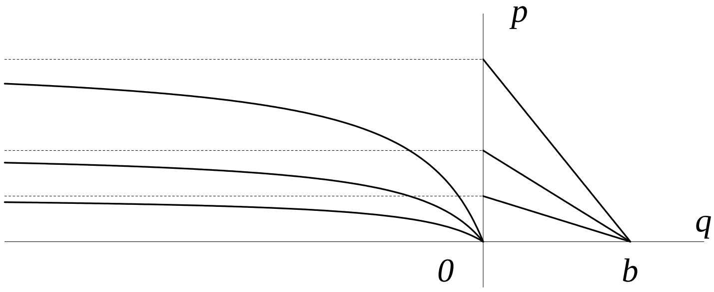
Als derde familie beschouwt men *de vraagrechten met a constant.* Deze rechten hebben een vast richtingscoëfficiënt $-a$, en worden beschreven door

$$D_b(p) = -ap + b,$$

waarbij nu b als positieve reële parameter kan gezien worden. De elasticiteitsfunctie wordt weer gegeven door

$$\frac{ED_b}{Ep} = \frac{p}{p - \frac{b}{a}},$$

Figuur 4.13: Een familie vraagfuncties met b constant, en de bijhorende prijselasticiteitsfunctie.

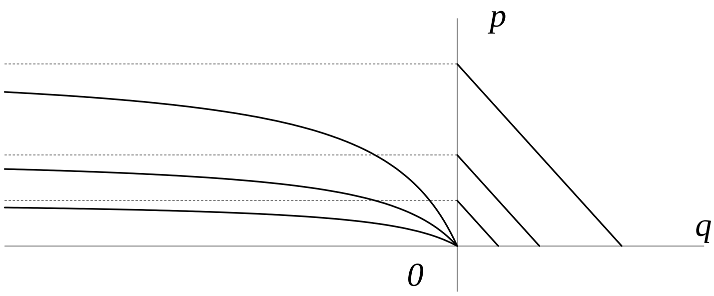


en de afgeleide naar b van deze elasticiteitsfunctie is

$$\frac{d}{db}\frac{ED_b}{Ep} = \frac{ap}{(ap-b)^2}.$$

Deze functie is positief, zodat de elasticiteit een stijgende functie is van b. Als b groter wordt (d.i. de vraagrechte komt verder van de oorsprong te liggen), dan wordt de elasticiteit voor eenzelfde p ook groter (minder negatief dus), en wordt de vraag dus minder elastisch. Dit fenomeen wordt geïllustreerd in Figuur 4.14.

Figuur 4.14: Een familie vraagfuncties met a constant, en de bijhorende prijselasticiteitsfunctie.



4.5.3.2 Prijselasticiteit van de lineaire aanbodfunctie

De lineaire aanbodfunctie wordt gegeven door

$$S : p \mapsto q = S(p) = ap + b,$$

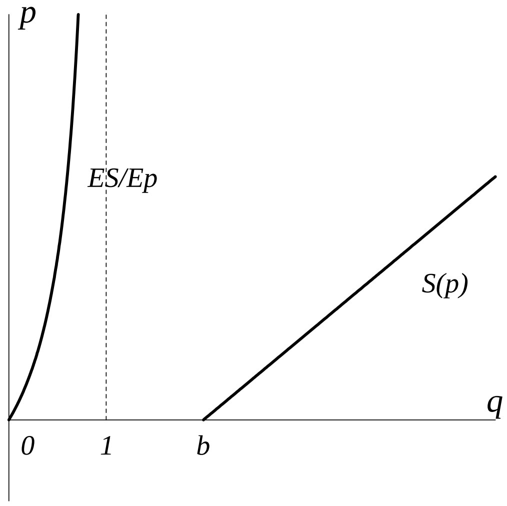
met $a > 0$ en $p \geq 0$. De elasticiteitsfunctie wordt gegeven door

$$\frac{ES}{Ep}(p) = \frac{ap}{ap+b} = \frac{p}{p+\frac{b}{a}}. \tag{4.16}$$

We hebben vroeger reeds opgemerkt dat er drie types lineaire aanbodfuncties zijn : inelastisch ($b > 0$), elasticiteit 1 ($b = 0$), of elastisch ($b < 0$).

Vooreerst beschouwen we het **inelastisch aanbod**, dus $b > 0$. Het relevante definitiegebied van $S(p)$ is dan $[0, +\infty[$, waarbij $S(p)$ stijgt van b tot $+\infty$. De elasticiteitsfunctie (4.16) is opnieuw een hyperbooltak, begrensd door de oorsprong (bij $p = 0$), en asymptotisch naderend tot $q = 1$ voor $p \to +\infty$, zie Figuur 4.15. De waarde van de

Figuur 4.15: Inelastische aanbodfunctie, en de bijhorende prijselasticiteitsfunctie.



elasticiteit behoort tot het interval $[0, 1[$, m.a.w. voor elke prijs is het aanbod inelastisch.

Opnieuw is het nuttig om de elasticiteiten te vergelijken voor een familie van aanbodfuncties. Als eerste verzameling beschouwen we *de familie met b/a constant*, m.a.w. de verzameling rechten door een vast snijpunt $-b/a$ met de p-as. De familie wordt beschreven door

$$S_t(p) = atp + bt,$$

en men verifieert gemakkelijk dat al deze aanbodrechten dezelfde elasticiteitsfunctie hebben.

De familie aanbodrechten met b constant bestaat uit een verzameling rechten met vast snijpunt b met de q-as, en $a > 0$ kan als parameter genomen worden. In dit geval is

$$S_a(p) = ap + b,$$

en de afgeleide van de elasticiteitsfunctie naar a wordt gegeven door

$$\frac{d}{da}(\frac{ES_a}{Ep})(p) = \frac{bp}{(ap + b)^2}.$$

Deze is positief, zodat de elasticiteit een stijgende functie is van a : als a groter wordt (dus als de rechte naar de q-as toe roteert) dan wordt de elasticiteit groter voor eenzelfde p (dus de elasticiteitsfunctie komt ook dichter bij de q-as te liggen).

De familie aanbodrechten met a constant bestaat uit een verzameling rechten met een vaste richtingscoëfficiënt a; het snijpunt b met de q-as kan nu als parameter genomen worden. In dit geval is

$$S_b(p) = ap + b,$$

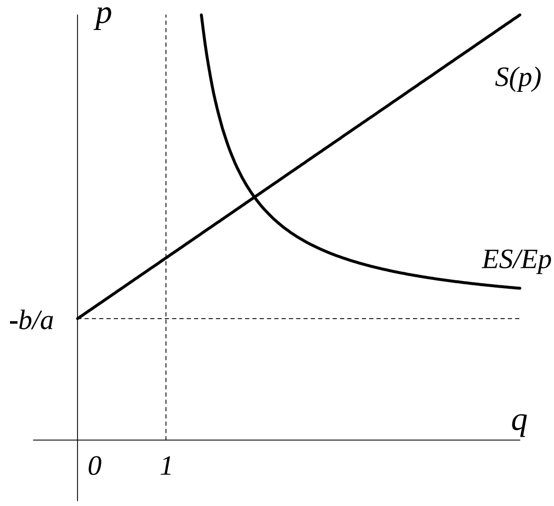
en de afgeleide van de elasticiteitsfunctie naar b wordt gegeven door

$$\frac{d}{db}(\frac{ES_b}{Ep})(p) = \frac{-ap}{(ap+b)^2}.$$

Deze is negatief, zodat de elasticiteit een dalende functie is van b : als b groter wordt (dus als de rechte verder van de oorsprong komt te liggen) dan wordt de elasticiteit kleiner voor eenzelfde p (dus de elasticiteitsfunctie komt ook dichter bij de p-as te liggen).

Vervolgens beschouwen we het **elastisch aanbod**, dus $b < 0$. Het relevante definitiegebied van $S(p)$ is dan $[-b/a, +\infty[$, waarbij $S(p)$ stijgt van 0 tot $+\infty$. De elasticiteitsfunctie (4.16) is opnieuw een hyperbooltak in het gebied $]-b/a, +\infty[$; voor p naderend naar $-b/a$ nadert de elasticiteit naar $+\infty$, en voor p naderend naar $+\infty$ nadert de elasticiteit naar 1, zie Figuur 4.16. De waarde van de elasticiteit behoort tot het interval

Figuur 4.16: Elastische aanbodfunctie, en de bijhorende prijselasticiteitsfunctie.



$]1, +\infty[$, m.a.w. voor elke prijs is het aanbod elastisch.

Opnieuw is het nuttig om de elasticiteiten te vergelijken voor een familie van elastische aanbodfuncties. Als eerste verzameling beschouwen we *de familie met $-b/a$ constant*, m.a.w. de verzameling rechten door een vast snijpunt $-b/a$ met de p-as. De familie wordt beschreven door

$$S_t(p) = atp + bt,$$

en men verifieert gemakkelijk dat al deze aanbodrechten dezelfde elasticiteitsfunctie hebben.

De familie aanbodrechten met b constant bestaat uit een verzameling rechten met vast snijpunt b met de q-as, en $a > 0$ kan als parameter genomen worden. In dit geval is

$$S_a(p) = ap + b,$$

en de afgeleide van de elasticiteitsfunctie naar a wordt gegeven door

$$\frac{d}{da}(\frac{ES_a}{Ep})(p) = \frac{bp}{(ap+b)^2}.$$

Deze is negatief, zodat de elasticiteit een dalende functie is van $a:$ als a groter wordt (dus als de rechte naar de q-as toe roteert) dan wordt de elasticiteit kleiner voor eenzelfde p (dus de elasticiteitsfunctie komt dichter bij de p-as te liggen).

De familie aanbodrechten met a constant bestaat uit een verzameling rechten met een vaste richtingscoëfficiënt a; het snijpunt b met de q-as kan nu als parameter genomen worden. In dit geval is

$$S_b(p) = ap + b,$$

en de afgeleide van de elasticiteitsfunctie naar b wordt gegeven door

$$\frac{d}{db}(\frac{ES_b}{Ep})(p) = \frac{-ap}{(ap+b)^2}.$$

Deze is negatief, zodat de elasticiteit een dalende functie is van $b:$ als b groter wordt (dus minder negatief; dus als de rechte dichter bij de oorsprong komt te liggen) dan wordt de elasticiteit kleiner voor eenzelfde p (dus de elasticiteitsfunctie komt dichter bij de p-as te liggen).

Tenslotte, voor het geval van een aanbodfunctie met $b = 0$ wordt de functie gegeven door

$$S(p) = ap,$$

met $a > 0$. De elasticiteitsfunctie is dan constant gelijk aan 1, ongeacht de prijs en ongeacht de parameter a.

4.5.4 De formule van Amoroso-Robinson

Stel dat een vraagfunctie $q = D(p)$ gegeven is, en $p = D^{-1}(q)$ is de inverse vraagfunctie. Dan geldt dat (met $q_0 = D(p_0)$)

$$D'(p_0) = \frac{1}{(D^{-1})'(q_0)}.$$

Voor de prijselasticiteit van de vraag geldt dan

$$\frac{ED}{Ep}(p_0) = p_0 \frac{D'(p_0)}{D(p_0)} = \frac{D^{-1}(q_0)}{q_0\ (D^{-1})'(q_0)}. \tag{4.17}$$

Beschouwen we nu de marginale opbrengst,

$$\frac{dR}{dq}(q_0) = D^{-1}(q_0) + q_0 \cdot (D^{-1})'(q_0).$$

Met behulp van (4.17) kan dit geschreven worden als

$$\begin{aligned} \frac{dR}{dq}(q_0) &= p_0(1 + \frac{q_0 \cdot (D^{-1})'(q_0)}{D^{-1}(q_0)}) \\ &= p_0 \cdot \left(1 + \frac{1}{\frac{ED}{Ep}(p_0)}\right). \end{aligned}$$

Dit staat bekend als de formule van Amoroso-Robinson, en geeft het verband tussen de marginale opbrengst, de prijs en de prijselasticiteit van de vraag.

4.6 Stellingen over afgeleiden

4.6.1 De stelling van Rolle

Stelling 4.5 *Stel dat f afleidbaar is in $]a, b[$ en continu in $[a, b]$. Als $f(a) = f(b) = 0$, dan bestaat er minstens één getal x_0 tussen a en b waarvoor geldt : $f'(x_0) = 0$.*

Bewijs. Omdat f continu is in $[a, b]$, is f er begrensd, en bestaan er getallen $x_m, x_M \in [a, b]$ zodat geldt

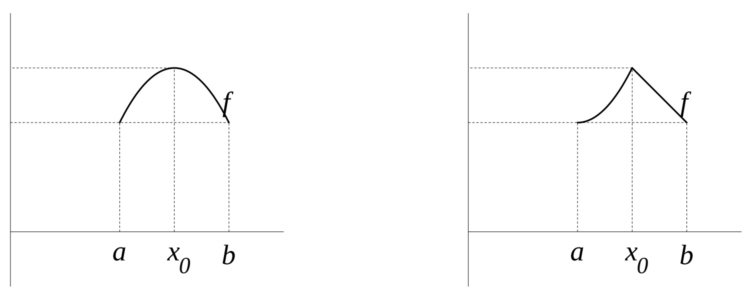
$$\forall x_0 \in [a, b] : f(x_m) \leq f(x_0) \leq f(x_M). \tag{4.18}$$

In het bijzonder, met $x_0 = a$ of b komt er $f(x_m) \leq 0 \leq f(x_M)$. Men onderscheidt twee gevallen : $f(x_m) = f(x_M)$, of $f(x_m) \neq f(x_M)$.
Als $f(x_m) = f(x_M)$, dan is $f(x_m) = f(x_M) = 0$, en dan volgt uit (4.18) dat f de constante functie 0 is in $[a, b]$. De afgeleide van deze functie is overal 0, zodat de stelling geldig is.
Als $f(x_m) \neq f(x_M)$ zijn er twee deelgevallen, nl. $f(x_m) < 0$ of $f(x_M) > 0$. We behandelen hier het geval $f(x_M) > 0$ (het andere deelgeval is volledig analoog). Omdat $f(x_M) \neq 0$, geldt $x_M \in]a, b[$. De functie is er dus afleidbaar, zodat de linker- en rechterafgeleide van f er bestaan en gelijk zijn aan $f'(x_M)$. Beschouwen we de linker- en rechterafgeleide in x_M :

$$\begin{aligned} \text{linkerafgeleide} &= f'_L(x_M) = \lim_{\substack{h \to 0 \\ h < 0}} \frac{f(x_M + h) - f(x_M)}{h}, \\ \text{rechterafgeleide} &= f'_R(x_M) = \lim_{\substack{h \to 0 \\ h > 0}} \frac{f(x_M + h) - f(x_M)}{h}. \end{aligned}$$

Dan volgt uit (4.18) dat $f'_L(x_M) \geq 0$ en $f'_R(x_M) \leq 0$. Hieruit besluit men dat $f'(x_M) = 0$.
□

Figuur 4.17: Voorbeeld en tegenvoorbeeld bij (het gevolg van) de stelling van Rolle.



Gevolg 4.6 *Stel dat f afleidbaar is in $]a, b[$ en continu in $[a, b]$. Als $f(a) = f(b)$, dan bestaat er minstens één getal x_0 tussen a en b waarvoor geldt : $f'(x_0) = 0$.*

Het bewijs van dit gevolg is eenvoudig : stel $f(a) = f(b) = C$, en stel $g(x) = f(x) - C$. Dan voldoet g aan de voorwaarden van de stelling van Rolle, dus er bestaat een x_0 met $g'(x_0) = 0$. Maar dan is ook $f'(x_0) = 0$.

De meetkundige betekenis van de stelling van Rolle (of het gevolg) is duidelijk : als f aan de gestelde voorwaarden voldoet, dan bestaat er minstens één punt tussen a en b waar de *raaklijn aan de grafiek van* f *evenwijdig is met de* **x**-*as*, zie Figuur 4.17.

Merk op dat de afleidbaarheid van f alleen geëist wordt in $]a, b[$, en de continuïteit in $[a, b]$. De stelling is dus ook geldig als f in a en/of b een verticale raaklijn heeft.

4.6.2 De middelwaardestellingen van Lagrange en Cauchy

Stelling 4.7 (Lagrange) *Stel dat f afleidbaar is in $]a, b[$ en continu in $[a, b]$. Dan bestaat er minstens één getal x_0 tussen a en b ($x_0 \in]a, b[$), waarvoor geldt*

$$f'(x_0) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}.$$

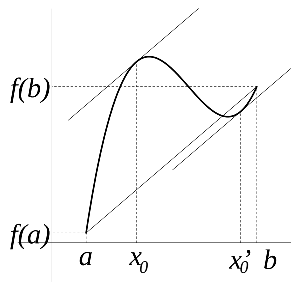
Bewijs. Stel $g(x) = \alpha x + \beta$. Als we eisen dat $g(a) = f(a)$ en $g(b) = f(b)$, dan leiden deze voorwaarden tot een unieke oplossing voor α en β, nl.

$$g(x) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a} x + \frac{bf(a) - af(b)}{b - a}.$$

De functie $f - g$ voldoet aan alle voorwaarden om de stelling van Rolle toe te passen, dus er bestaat een $x_0 \in]a, b[$ met $(f - g)'(x_0) = 0$, m.a.w. $f'(x_0) = g'(x_0) = \frac{f(b)-f(a)}{b-a}$. □

De meetkundige betekenis van deze stelling is als volgt : als f aan de gestelde voorwaarden voldoet, dan bestaat er minstens één punt tussen a en b waar *de raaklijn aan de grafiek van f evenwijdig is met de koorde bepaald door $(a, f(a))$ en $(b, f(b))$*, omdat $\frac{f(b)-f(a)}{b-a}$ de richtingscoëfficiënt is van deze koorde, zie Figuur 4.18.

Figuur 4.18: Voorbeeld bij de middelwaardestelling van Lagrange.



Gevolg 4.8 *Stel dat f afleidbaar is in $]a, b[$ en continu in $[a, b]$. Als $f'(x_0) = 0$ voor elke $x_0 \in]a, b[$, dan is f een constante functie in $[a, b]$.*

Bewijs. Beschouw twee punten $x_1, x_2 \in [a, b]$, met $x_1 < x_2$. Toepassing van de stelling van Lagrange op de restrictie van f tot $[x_1, x_2]$ impliceert dat er een $x_0 \in]x_1, x_2[$ bestaat met $f'(x_0) = \frac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1}$. Maar $f'(x_0) = 0$, dus moet $f(x_1) = f(x_2)$. Dit geldt voor elk koppel punten uit $[a, b]$, dus f is een constante functie. □

Gevolg 4.9 *Stel dat f en g afleidbaar zijn in $]a,b[$ en continu in $[a,b]$. Als $f'(x_0) = g'(x_0)$ voor elke $x_0 \in]a,b[$, dan is $f - g$ een constante functie in $[a,b]$.*

Dit volgt onmiddellijk door het vorige resultaat toe te passen op $f - g$.

Stelling 4.10 (Cauchy) *Stel dat f en g afleidbaar zijn in $]a,b[$ en continu in $[a,b]$. Als g' niet nul wordt in $]a,b[$, dan bestaat er een $x_0 \in]a,b[$ waarvoor geldt*

$$\frac{f'(x_0)}{g'(x_0)} = \frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)}.$$

Bewijs. Definieer de functie $F(x)$ als volgt :

$$F(x) = \Big(g(b) - g(a)\Big)\Big(f(x) - f(a)\Big) - \Big(g(x) - g(a)\Big)\Big(f(b) - f(a)\Big).$$

Dan is F continu in $[a,b]$ en afleidbaar in $]a,b[$, met

$$F'(x) = \Big(g(b) - g(a)\Big)f'(x) - g'(x)\Big(f(b) - f(a)\Big).$$

Men rekent gemakkelijk na dat $F(a) = F(b) = 0$, dus de stelling van Rolle kan toegepast worden, en er bestaat een $x_0 \in]a,b[$ waarvoor $F'(x_0) = 0$, of dus

$$\Big(g(b) - g(a)\Big)f'(x_0) - g'(x_0)\Big(f(b) - f(a)\Big) = 0. \tag{4.19}$$

Omdat $g' \neq 0$ in $]a,b[$ is $g(b) - g(a) \neq 0$, en volgt uit (4.19) het gestelde. □

4.6.3 De stelling van Taylor

Stelling 4.11 *Stel dat f minstens m maal afleidbaar is in een interval I. Als $a, b \in I$, dan bestaat er minstens één getal x_0 tussen a en b waarvoor de formule van Taylor van f in a geldt, nl.*

$$\begin{aligned} f(b) &= f(a) + \frac{(b-a)}{1!}f'(a) + \frac{(b-a)^2}{2!}f''(a) + \cdots \\ &\quad + \frac{(b-a)^{m-1}}{(m-1)!}f^{(m-1)}(a) + \frac{(b-a)^m}{m!}f^{(m)}(x_0). \end{aligned}$$

Bewijs. Noteer vooreerst met A het reëel getal bepaald door de volgende vergelijking :

$$\begin{aligned} f(b) &= f(a) + \frac{(b-a)}{1!}f'(a) + \frac{(b-a)^2}{2!}f''(a) + \cdots \\ &\quad + \frac{(b-a)^{m-1}}{(m-1)!}f^{(m-1)}(a) + \frac{(b-a)^m}{m!}A. \end{aligned}$$

Vervolgens introduceren we de hulpfunctie g in $[a, b]$ (neem aan dat $a < b$) d.m.v.

$$\begin{aligned} g(x) &= f(x) + \frac{(b-x)}{1!} f'(x) + \frac{(b-x)^2}{2!} f''(x) + \cdots \\ &\quad + \frac{(b-x)^{m-1}}{(m-1)!} f^{(m-1)}(x) + \frac{(b-x)^m}{m!} A - f(b). \end{aligned}$$

Elke term in deze uitdrukking is afleidbaar, dus g is afleidbaar en continu in $[a, b]$, en er geldt $g(a) = g(b) = 0$. De stelling van Rolle kan toegepast worden : er bestaat een $x_0 \in]a, b[$ met $g'(x_0) = 0$. Als we g' berekenen, komt er

$$\begin{aligned} g'(x) &= f'(x) - \frac{1}{1!} f'(x) \\ &\quad + \frac{(b-x)}{1!} f''(x) - 2\frac{(b-x)}{2!} f''(x) \\ &\quad + \frac{(b-x)^2}{2!} f'''(x) - \cdots \\ &\quad + \cdots - (m-1)\frac{(b-x)^{m-2}}{(m-1)!} f^{(m-1)}(x) \\ &\quad + \frac{(b-x)^{m-1}}{(m-1)!} f^{(m)}(x) - m\frac{(b-x)^{m-1}}{m!} A \\ &= \frac{(b-x)^{m-1}}{(m-1)!} (f^{(m)}(x) - A). \end{aligned}$$

Hieruit volgt dat $A = f^{(m)}(x_0)$. $\square$

Enkele opmerkingen en gevolgen :

1. Voor het geval $m = 1$ levert de stelling van Taylor precies de stelling van Lagrange op.

2. De formule uit stelling 4.11 wordt *de formule van Taylor van orde* $m - 1$ genoemd. De laatste term,
$$\frac{(b-a)^m}{m!} f^{(m)}(x_0),$$
wordt de *sluitterm* of restterm van orde m genoemd.

3. Als f een veeltermfunctie van graad n is, zijn de afgeleide functies nul vanaf de orde $n+1$, zodat de formule van Taylor (voor $m > n$) geen sluitterm heeft, en de formule luidt :
$$f(b) = f(a) + \frac{(b-a)}{1!} f'(a) + \frac{(b-a)^2}{2!} f''(a) + \cdots + \frac{(b-a)^n}{n!} f^{(n)}(a).$$
Omdat b willekeurig is in I, geldt deze formule voor elke x in I, dus
$$f(x) = f(a) + \frac{(x-a)}{1!} f'(a) + \frac{(x-a)^2}{2!} f''(a) + \cdots + \frac{(x-a)^n}{n!} f^{(n)}(a),$$
hetgeen duidelijk een veelterm van graad n in x voorstelt.

Meer algemeen, als men de formule van Taylor neerschrijft voor een willekeurige $x \in I$, dan komt er

$$\begin{aligned} f(x) &= f(a) + \frac{(x-a)}{1!} f'(a) + \frac{(x-a)^2}{2!} f''(a) + \cdots \\ &+ \frac{(x-a)^{m-1}}{(m-1)!} f^{(m-1)}(a) + \frac{(x-a)^m}{m!} f^{(m)}(x_0), \end{aligned}$$

met x_0 gelegen tussen a en x. Deze formule drukt uit dat f kan geschreven worden als een veelterm van graad $m-1$, aangevuld met een sluitterm. Als deze sluitterm voldoende klein is, geeft de formule van Taylor een "benaderde veelterm" voor f.

4. Stel $b = a + h$, dan luidt het resultaat : als f minstens m maal afleidbaar is in een interval I en $a, a+h \in I$, dan bestaat er minstens één getal θ tussen 0 en 1 waarvoor geldt

$$\begin{aligned} f(a+h) &= f(a) + \frac{h}{1!} f'(a) + \frac{h^2}{2!} f''(a) + \cdots \\ &+ \frac{h^{m-1}}{(m-1)!} f^{(m-1)}(a) + \frac{h^m}{m!} f^{(m)}(a+\theta h). \end{aligned}$$

De sluitterm is dus evenredig met h^m. Hoe kleiner $|h|$, hoe kleiner de sluitterm, en hoe beter het eerste deel van de formule van Taylor een benadering oplevert voor de waarde $f(a+h)$.

4.6.4 Stellingen over monotone functies

Stelling 4.12 *Stel dat $[a, b] \subseteq \mathrm{def}(f)$ en dat f afleidbaar is in $]a, b[$. Als f monotoon stijgend (resp. dalend) is in $[a, b]$, dan geldt voor de afgeleide functie f' in $]a, b[$: $f' \geq 0$ (resp. $f' \leq 0$).*

Bewijs. Neem aan dat f monotoon stijgend is, en beschouw $x_0, x_0 + h \in]a, b[$. Dan geldt (ongeacht het teken van $h \neq 0$)

$$\frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} \geq 0,$$

en hieruit volgt het gestelde. □

Stelling 4.13 *Stel dat f afleidbaar is in $]a, b[$ en continu in $[a, b]$. Als de afgeleide functie f' positief (resp. negatief) is in $]a, b[$: $f' \geq 0$ (resp. $f' \leq 0$), dan is f monotoon stijgend (resp. dalend) in $[a, b]$.*

Bewijs. Neem aan dat $f' \geq 0$ in $]a, b[$. Beschouw twee willekeurige punten $x_1, x_2 \in [a, b]$ met $x_1 < x_2$. De restrictie van f tot $[x_1, x_2]$ voldoet aan de stelling van Lagrange, dus er bestaat een $x_0 \in]x_1, x_2[$ waarvoor geldt

$$f'(x_0) = \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1}.$$

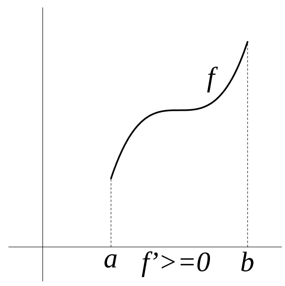
Omdat $f'(x_0) \geq 0$ volgt hieruit dat $f(x_2) \geq f(x_1)$, en dus is f stijgend in $[a, b]$. $\square$

Uit dit bewijs ziet men onmiddellijk in dat ook het volgende resultaat geldig is : *Stel dat f afleidbaar is in $]a, b[$ en continu in $[a, b]$. Als de afgeleide functie f' strikt positief (resp. strikt negatief) is in $]a, b[$: $f' > 0$ (resp. $f' < 0$), dan is f strikt monotoon stijgend (resp. dalend) in $[a, b]$.*

Omgekeerd is het echter niet zo : als f strikt monotoon stijgend is in $[a, b]$ kan men enkel besluiten dat $f' \geq 0$ (en niet $f' > 0$) in $]a, b[$.

De eigenschappen uit deze paragraaf worden geïllustreerd in Figuur 4.19.

Figuur 4.19: f monotoon stijgend : $f' \geq 0$.



4.7 Berekening van limieten in onbepaalde gevallen

4.7.1 De regel van de L'Hospital

Stelling 4.14 *Stel dat f' en g' bestaan en continu zijn in $I \backslash \{a\}$, met I een interval dat a bevat (of $I = [p, +\infty[$ resp. $I =]-\infty, q]$ als $a = +\infty$ resp. $a = -\infty$). Stel dat*

$$\lim f(x) = \lim g(x) = 0, \tag{4.20}$$

waarbij lim *kan staan voor*

$$\lim_{x \to a}, \lim_{\substack{x \to a \\ x > a}}, \lim_{\substack{x \to a \\ x < a}}, \lim_{x \to +\infty}, \lim_{x \to -\infty}.$$

Als de volgende limiet bestaat :

$$\lim \frac{f'(x)}{g'(x)} = b, \tag{4.21}$$

dan geldt

$$\lim \frac{f(x)}{g(x)} = \lim \frac{f'(x)}{g'(x)} = b. \tag{4.22}$$

Hierbij staat lim *in (4.20), (4.21) en (4.22) uiteraard voor dezelfde limiet.*

Bewijs. Het complete bewijs bevat verschillende gevallen, al naargelang de limiet en de eigenlijke of oneigenlijke waarde van b. We zullen ter illustratie het geval

$$\lim = \lim_{\substack{x\to a\\ x>a}}$$

beschouwen, met b een eigenlijke limiet. Omdat $\lim_{\substack{x\to a\\ x>a}} \frac{f'(x)}{g'(x)} = b$ bestaat, betekent dit dat er een interval $]a, a+h]$ is waar g' niet nul wordt. Omdat f' en g' bestaan in $]a, a+h]$, zijn f en g continu in $]a, a+h]$. Met de gegeven limietwaarde 0 kunnen we f en g continu uitbreiden tot $[a, a+h]$ door $f(a) = g(a) = 0$ te stellen (strikt genomen moeten we een andere notatie $\tilde{f}$ en $\tilde{g}$ invoeren voor deze uitbreiding). We kunnen nu de middelwaardestelling van Cauchy toepassen : er bestaat een getal $x_0(h)$ met $a < x_0(h) < a+h$ met

$$\frac{f'(x_0(h))}{g'(x_0(h))} = \frac{f(a+h) - f(a)}{g(a+h) - g(a)} = \frac{f(a+h)}{g(a+h)}.$$

Het resultaat volgt door de rechterlimiet voor h gaande naar 0 te beschouwen. □

De regel van de L'Hospital is vooral interessant voor toepassingen. Als de berekening van een limiet $\lim \frac{f(x)}{g(x)}$ leidt tot het onbepaald geval $\frac{0}{0}$, en f en g voldoen aan de voorwaarden van de stelling, dan mag de berekening van $\lim \frac{f(x)}{g(x)}$ vervangen worden door die van $\lim \frac{f'(x)}{g'(x)}$. Merk op, als ook de berekening van $\lim \frac{f'(x)}{g'(x)}$ zou leiden tot de onbepaaldheid $\frac{0}{0}$, en f' en g' voldoen aan de condities van de stelling, dan kan de regel van de L'Hospital tweemaal toegepast worden, i.e. $\lim \frac{f(x)}{g(x)} = \lim \frac{f'(x)}{g'(x)} = \lim \frac{f''(x)}{g''(x)}$. Dit proces kan eventueel verdergezet worden tot geen onbepaaldheden meer optreden.

Beschouw als voorbeeld

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sin(x) - x}{x^3} = \lim_{x\to 0} \frac{\cos(x) - 1}{3x^2} = \lim_{x\to 0} \frac{-\sin(x)}{6x} = \lim_{x\to 0} \frac{-\cos(x)}{6} = -\frac{1}{6}.$$

4.7.2 Uitbreiding van de regel van de L'Hospital

Stelling 4.15 *Stel dat f' en g' bestaan en continu zijn in $I\backslash\{a\}$, met I een interval dat a bevat (of $I = [p, +\infty[$ resp. $I =]-\infty, p]$ als $a = +\infty$ resp. $a = -\infty$). Stel dat*

$$\lim f(x) = \lim g(x) = \infty, \tag{4.23}$$

waarbij lim *kan staan voor*

$$\lim_{x\to a},\ \lim_{\substack{x\to a\\ x>a}},\ \lim_{\substack{x\to a\\ x<a}},\ \lim_{x\to+\infty},\ \lim_{x\to-\infty}.$$

Als de volgende limiet bestaat :

$$\lim \frac{f'(x)}{g'(x)} = b, \tag{4.24}$$

dan geldt

$$\lim \frac{f(x)}{g(x)} = \lim \frac{f'(x)}{g'(x)} = b. \tag{4.25}$$

Opnieuw staat er dezelfde limiet in (4.23), (4.24) en (4.25).

De eerste stelling noemt men het geval $\frac{0}{0}$; de huidige stelling is het geval $\frac{\infty}{\infty}$. Het bewijs van deze tweede stelling wordt hier niet opgenomen. Zoals de eerste stelling is ze vooral belangrijk voor toepassingen. Als de berekening van een limiet $\lim \frac{f(x)}{g(x)}$ leidt tot het onbepaald geval $\frac{\infty}{\infty}$, en f en g voldoen aan de voorwaarden van de stelling, dan mag de berekening van $\lim \frac{f(x)}{g(x)}$ vervangen worden door die van $\lim \frac{f'(x)}{g'(x)}$, en eventueel kan dit proces nog verdergezet worden.

Mits de nodige aanpassingen kan men de regel van de L'Hospital voor de onbepaaldheden $\frac{0}{0}$ en $\frac{\infty}{\infty}$ ook gebruiken om de berekening van limieten door te voeren die leiden tot de onbepaalde gevallen $0 \cdot \infty$ of $\infty - \infty$. Als $\lim f(x) = 0$ en $\lim g(x) = \infty$, kan men de berekening van $\lim f(x)g(x)$ herleiden naar

$$\lim \frac{f(x)}{\frac{1}{g(x)}}, \text{ of } \lim \frac{g(x)}{\frac{1}{f(x)}},$$

hetgeen de gevallen $\frac{0}{0}$ of $\frac{\infty}{\infty}$ oplevert. Uiteraard moet men de voorwaarden voor toepassing dan verifiëren. Als $\lim f(x) = \infty$ en $\lim g(x) = \infty$, kan men de berekening van $\lim f(x) - g(x)$ herleiden naar

$$\lim \frac{\frac{1}{g(x)} - \frac{1}{f(x)}}{\frac{1}{f(x)g(x)}}, \text{ of } \lim \frac{f(x)g(x)}{\frac{1}{\frac{1}{g(x)} - \frac{1}{f(x)}}},$$

wat weer aanleiding geeft tot het geval $\frac{0}{0}$ of $\frac{\infty}{\infty}$.

4.7.3 Nog enkele onbepaalde gevallen

Bij de berekening van de limiet van een functie van de gedaante $f(x)^{g(x)}$ kan men gebruik maken van de rekenregel

$$\lim f(x)^{g(x)} = (\lim f(x))^{\lim g(x)}.$$

Dit kan aanleiding geven tot één van de volgende onbepaaldheden :

- $\lim f(x) = 1$ en $\lim g(x) = \infty$, genoteerd als 1^∞;
- $\lim f(x) = 0$ en $\lim g(x) = 0$, genoteerd als 0^0;
- $\lim f(x) = \infty$ en $\lim g(x) = 0$, genoteerd als ∞^0.

Men kan de berekening van zulke limieten herleiden naar een gekend geval door niet direct de gevraagde limiet te berekenen, maar eerst

$$\lim \ln(f(x)^{g(x)}).$$

Als immers $\lim \ln(f(x)^{g(x)}) = k$, dan geldt wegens de continuïteit van ln dat $\lim f(x)^{g(x)} = \exp(k) = e^k$ (waaraan ook een betekenis kan gegeven worden als k oneigenlijk is). Voor de berekening van $\lim \ln(f(x)^{g(x)})$ maakt men dan gebruik van

$$\ln(f(x)^{g(x)}) = g(x) \cdot \ln(f(x)),$$

zodat de drie bovenstaande gevallen zich herleiden tot $\infty \cdot 0$ of $0 \cdot \infty$.

4.8 Tabel van afgeleiden en rekenregels

Voor praktische toepassingen is het handig om over een tabel van afgeleide functies te beschikken. Tevens geven we een tabel met de meestgebruikte rekenregels voor afgeleiden.

Tabel 4.1: Afgeleide functies en rekenregels voor afgeleiden.

functie	afgeleide	functie	afgeleide
constante	0		
x	1	$f(x)$	$f'(x)$
x^n	nx^{n-1}	f^n	$nf^{n-1}f'$
$\frac{1}{x} = x^{-1}$	$-\frac{1}{x^2} = -x^{-2}$	$\frac{1}{f(x)}$	$-\frac{f'}{f^2}$
$\sqrt[n]{x} = x^{\frac{1}{n}}$	$\frac{1}{n\sqrt[n]{x^{n-1}}} = \frac{1}{n}x^{\frac{1}{n}-1}$	$\sqrt[n]{f}$	$\frac{f'}{n\sqrt[n]{f^{n-1}}}$
x^α	$\alpha x^{\alpha-1}$	f^α	$\alpha f^{\alpha-1}f'$
$\ln x$	$\frac{1}{x}$	$\ln f$	$\frac{f'}{f}$
$\log_a x$	$\frac{1}{\ln a}\frac{1}{x}$	$\log_a f$	$\frac{1}{\ln a}\frac{f'}{f}$
e^x	e^x	e^f	$f'e^f$
a^x	$(\ln a)a^x$	a^f	$(\ln a)f'a^f$
$\sin x$	$\cos x$	$\sin f$	$f'\cos f$
$\cos x$	$-\sin x$	$\cos f$	$-f'\sin f$
$\tan x$	$\frac{1}{\cos^2 x} = 1 + \tan^2 x$	$\tan f$	$\frac{f'}{\cos^2 f}$
$\cot x$	$-\frac{1}{\sin^2 x} = -(1 + \cot^2 x)$	$\cot f$	$-\frac{f'}{\sin^2 f}$
$\arcsin x$	$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	$\arcsin f$	$\frac{f'}{\sqrt{1-f^2}}$
$\arccos x$	$-\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	$\arccos f$	$-\frac{f'}{\sqrt{1-f^2}}$
$\arctan x$	$\frac{1}{1+x^2}$	$\arctan f$	$\frac{f'}{1+f^2}$

functie	afgeleide
$f + g$	$f' + g'$
Cf	Cf'
$f \cdot g$	$f' \cdot g + f \cdot g'$
fgh	$f'gh + fg'h + fgh'$
$\frac{f}{g}$	$\frac{f' \cdot g - f \cdot g'}{g^2}$
$f(g(x))$	$f'(g(x)) \cdot g'(x)$